



# 6° SIPEMAT

Simpósio Internacional de Pesquisa  
em Educação Matemática

6° INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RESEARCH IN MATHEMATICAL EDUCATION  
6° SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
6° SYMPOSIUM INTERNATIONAL SUR LA RECHERCHE EM ÉDUCTION  
MATHÉMATIQUE

23 a 25 de maio de 2024 – CAMPINA GRANDE- PARAÍBA - BRASIL  
ISSN xxx-xx-xxxxx-xx-x

SOUZA, Rodrigo Baltazar de; GIORDANO, Cassio Cristiano; OLIVEIRA, Paulo Cesar. Nível do desenvolvimento do pensamento algébrico em tarefas introdutórias envolvendo funções exponenciais. *In*: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: a Educação Matemática num mundo pós-pandêmico, 6., 2024, Campina Grande. *Anais [...]*. Campina Grande: UEPB, 2024. 12p. Disponível em: <https://doi.org/10.29327/1413695.6-13>.

## NÍVEL DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM TAREFAS INTRODUTÓRIAS ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

*Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza*<sup>1</sup>  
*Cassio Cristiano Giordano*<sup>2</sup>  
*Paulo César Oliveira*<sup>3</sup>

### RESUMO

Esta pesquisa surgiu ao buscarmos compreender em que nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico (PA) que alunos do 1º ano do Ensino Médio ao iniciarem os estudos de Funções Exponenciais. Para isso optamos por utilizar o modelo proposto por Almeida (2016) para determinar o nível de desenvolvimento do PA. Utilizamos como forma de complementar a análise das atividades, a teoria do Registros de Representação Semiótica proposta por Duval (2009). O objetivo deste trabalho foi identificar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico presente em tarefas realizadas por alunos da 1ª série do Ensino Médio, que optaram por um Itinerário Formativo sem o aprofundamento em conceitos da Matemática, ao iniciarem os estudos referentes a função exponencial. Nossa pesquisa tem caráter qualitativo, sendo assim, buscamos descrever a turma participante da pesquisa e como foram aplicadas as atividades com o objetivo de responder à questão “Quais são os níveis de desenvolvimento e as características do Pensamento Algébrico presentes na resolução de tarefas envolvendo função exponencial para alunos da 1ª série do Ensino Médio?”. Para responder à questão de pesquisa, optamos por utilizar uma Sequência Didática baseada na Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, sendo realizada assim as análises, a experimentação e a validação dos resultados. Ao final de nossa pesquisa observamos que os alunos da turma analisada apresentaram os níveis 0 (ausência) e 1 (incipiente) do desenvolvimento do pensamento algébrico ao iniciar os

<sup>1</sup> Colégio Politécnico de Sorocaba. E-mail: rodrigo.rb@politecnicosorocaba.com.br

<sup>2</sup> Universidade Federal do Rio Grande - FURG. E-mail: ccgiordano@gmail.com

<sup>3</sup> Universidade Federal de São Carlos – UFSCar. E-mail: paulooliveira@ufscar.br

estudos referentes a Função exponencial, além de observar como a mobilização de vários registros de representação contribuem para um melhor desenvolvimento do PA.

**Palavras-chave:** Pensamento algébrico. Função Exponencial. Registros de Representação Semiótica. Níveis de desenvolvimento.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho é um recorte dos estudos realizados na dissertação de mestrado do primeiro autor, desenvolvida com alunos da 1ª série do Ensino Médio, com o objetivo de identificar o nível de desenvolvimento do Pensamento Algébrico em tarefas introdutórias envolvendo Função exponencial.

Almeida e Câmara (2017) consideram que o tipo de registro em relação ao Pensamento Algébrico depende do nível de experiência dos alunos. É importante diferenciar o termo nível de experiência do nível escolar, pois um aluno não precisa estar no 8º ano do Ensino Fundamental, no qual geralmente é iniciada a introdução da utilização de variáveis e incógnitas, para se utilizar dessas representações no desenvolvimento do Pensamento Algébrico, ou seja, o nível de experiência do aluno está ligado aos seus conceitos relativos à Matemática, independentemente do nível escolar.

Pensando nos diferentes registros para representar o Pensamento Algébrico, observamos uma ligação entre os estudos propostos por Almeida e Câmara (2017) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval, pois em ambos os trabalhos é explorada a importância do símbolo e do significado que um objeto matemático pode apresentar.

No sentido de compreender em que níveis do desenvolvimento algébrico os alunos se encontram, ao realizarem atividades envolvendo Função exponencial, optou-se, neste trabalho, em buscar responder a seguinte questão: **“Quais são os níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico presentes na resolução de tarefas envolvendo função exponencial para alunos da 1ª série do ensino médio?”**.

Com o objetivo de responder à questão de pesquisa e utilizando um padrão para validar os dados coletados, e conseqüentemente evitar conclusões enviesadas, buscou-se uma Sequência Didática baseada na Engenharia Didática

como metodologia de pesquisa. Segundo Almouloud e Coutinho (2008) a Engenharia Didática se caracteriza como metodologia de pesquisa, pois:

[...] em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOULOU e COUTINHO, 2008, p. 66)

A seguir são apresentados os estudos que fundamentaram a análise das atividades desenvolvidas, sendo elas o modelo proposto por Almeida (2016) das características e níveis do desenvolvimento do Pensamento algébrico e a teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval (2009).

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Almeida e Câmara (2017) acreditam que o pensar algebricamente pode ser abordado por meio de cinco características, sendo elas: “estabelecer relações” (CER), que se baseia na capacidade do indivíduo observar as diferentes relações entre os elementos que constituem uma tarefa matemática; “generalizar” (CG), que é capacidade do indivíduo realizar a conversão e síntese das tarefas propostas para uma linguagem genuinamente algébrica; “modelar” (CM), que é quando o indivíduo começa a construir um modelo matemático, não necessariamente algébrico, para representar o problema apresentado em linguagem natural; “operar com o desconhecido como se fosse conhecido” (COD), que é como o indivíduo desenvolve e opera com a linguagem algébrica; e “construir significado para linguagem e o objeto algébrico”(CCS), que é quando o indivíduo consegue estabelecer um significado para o objeto matemático e, desta forma, diferenciar suas representações.

Almeida e Câmara (2017) sustentam que no cerne dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacente a ela, porém, não menos importantes, estão as outras. Neste caso os autores defendem que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais.

Almeida (2016) utiliza dessas cinco características do Pensamento Algébrico para determinar os níveis do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, que apesar de ser desenvolvido para problemas de partilha, observamos que há possibilidade de utilizá-lo para a análise de atividades que envolvam o objeto matemático função exponencial. Almeida (2016) define em seu modelo os níveis como sendo: nível 0 (ausência do pensamento algébrico), nível 1 (pensamento algébrico incipiente), nível 2 (pensamento algébrico intermediário) e nível 3 (pensamento algébrico consolidado).

O nível 0 é composto por alunos que “não conseguem chegar na resposta correta de um problema desse tipo, deixando-o sem resposta, ou adotando alguma estratégia que leva a resposta errada” (ALMEIDA, 2019, p. 133). Nesse caso não significa que o aluno não mobiliza nenhuma das características do pensamento algébrico, como por exemplo as de generalização de sequência, entretanto não consegue desenvolver os elementos encontrados que possibilitem a resolução dessa atividade.

No nível 1 os alunos entendem a incógnita como um elemento vazio a ser preenchido por valores particulares e conhecidos. Ao avaliar alunos que utilizaram a estratégia de atribuir valores aos elementos desconhecidos, Almeida (2016, p.138) observou que “os alunos que adotam essa estratégia revelam mobilizar as seguintes características do pensar algebricamente: capacidade de estabelecer relações; capacidade de modelar, e capacidade de construir significado para a linguagem e o objeto algébrico”.

Os alunos que apresentam características do nível 1 se diferenciam dos alunos que apresentam características do nível 2, pois “nesse último o modelo matemático se aproxima mais do modelo esperado para o problema” (ALMEIDA, 2016, p.140), ou seja, os alunos novamente irão mobilizar quatro das cinco características do Pensamento Algébrico, todavia nesse nível determinarão um modelo matemático próximo ao desejado para atividade.

Os alunos que se encontram no nível 3 “conseguem, de forma consolidada, mobilizar todas as cinco características dessa forma de pensar”, ou seja, além das quatro características utilizadas no nível 2, os alunos presentes neste nível conseguem mobilizar a característica “operar com o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica” (ALMEIDA, 2016, p. 145).

O termo Registros de Representação Semiótica é utilizado para designar os diferentes tipos de representação semiótica, tais como: língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica.

Segundo Duval (2009), para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose. A primeira atividade cognitiva está ligada à possibilidade de se confirmar o que está sendo apresentado. O autor denomina essa atividade cognitiva como *formação*, sendo assim, diz-se que uma representação é identificável, no caso da Matemática, o objeto matemático que a representa. Segundo Duval (2009), os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele.

A característica do Pensamento Algébrico relacionada à formação é a capacidade de estabelecer relações, pois a forma como o aluno buscará construir as relações entre diferentes grandezas ou situações que são apresentadas é o ponto de partida para o aluno apresentar as demais características do Pensamento algébrico. Almeida (2016, p. 79) acredita “que a primeira característica do Pensamento Algébrico desenvolvida por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais”.

A segunda é o tratamento de uma representação, que são as modificações da representação de um objeto que pertence ao mesmo registro inicial, assim sendo, o tratamento é uma mudança intrínseca do registro.

A última atividade cognitiva apresentada por Duval (2009) é a conversão, que são as transformações externas dos registros, ou seja, as mudanças de um registro para outro conservando totalmente ou parte somente da representação inicial. Das características do Pensamento Algébrico, propostos por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2017), a conversão está relacionada à capacidade de modelar e generalizar, pois ao buscar estratégias utilizando de diferentes registros semióticos (língua natural, figural, numérica, entre outras) para determinar as relações presentes em uma situação (capacidade de modelar) e apresentar uma representação algébrica para generalizar a situação proposta (capacidade de generalizar).

## **METODOLOGIA**

Para a pesquisa proposta optamos por utilizar a divisão, em três fases, da metodologia da Engenharia Didática proposta Almouloud e Coutinho (2008), sendo elas: análises prévias; construção e análise *a priori*; e por fim, experimentação, análise a posteriori e validação.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008) a fase “análises prévias”, consiste na realização do embasamento teórico do trabalho a ser desenvolvido, que pode comportar os trabalhos analisados para o referencial teórico, com o objetivo de dar suporte à pesquisa; às características dos indivíduos da pesquisa; à apresentação e argumentação sobre objetivos específicos da pesquisa, entre outros.

Na fase construção e análise *a priori*, é o momento de construção da sequência didática proposta e da análise das possíveis construções que podem ser desenvolvidas pelos alunos no decorrer da resolução das tarefas propostas. O “objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido” (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 67).

Ainda sobre a segunda fase da pesquisa, construímos as sequências didáticas propostas, realizamos uma análise prévia das atividades que foram aplicadas aos alunos, para as quais buscamos prever possíveis resoluções e dificuldades que os alunos poderiam apresentar.

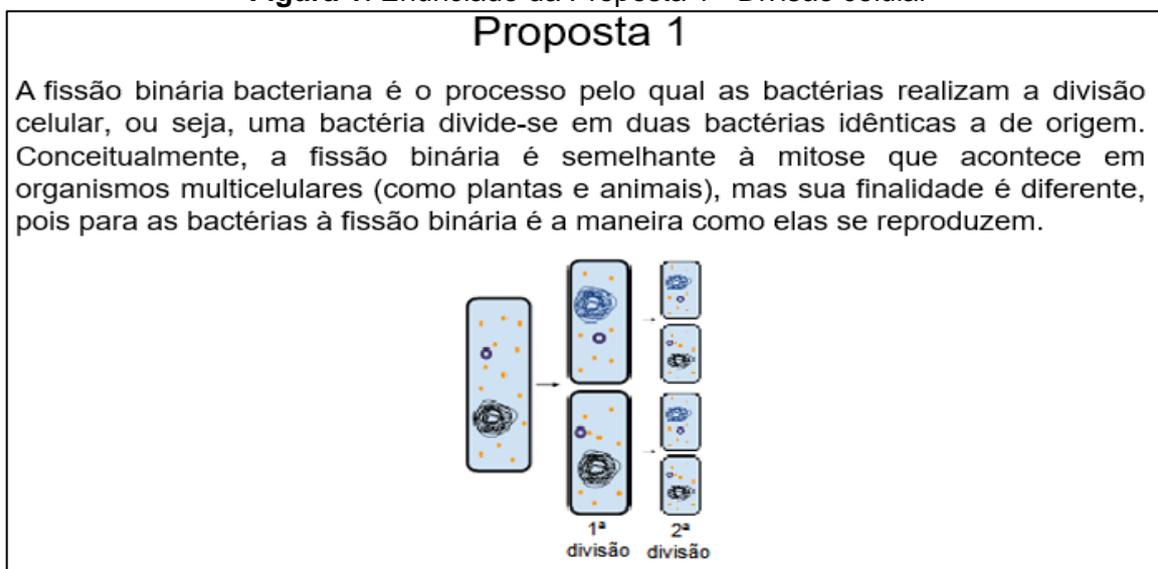
Na fase experimentação, análise *a posteriori* e validação, realizamos a aplicação das atividades para os alunos. Foram realizados questionamentos durante a aplicação das atividades sobre as dificuldades que os alunos apresentaram durante seu desenvolvimento. Nessa fase também foram realizadas as análises das construções realizadas pelos alunos, buscando validar ou não as previsões realizadas durante a análise *a priori* das atividades.

## **ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Para este artigo optamos por apresentar os resultados obtidos na aplicação da Proposta 1 (Figura 1), que envolveu a divisão celular de uma bactéria, para o

qual os alunos, a partir das tarefas propostas, buscaram completar uma tabela com os valores (itens **a** e **d**), apresentar a lei de formação (itens **b** e **e**), construir o gráfico da situação (itens **d** e **f**), e por fim, estabelecer conexões entre os itens correlatos.

**Figura 1:** Enunciado da Proposta 1 - Divisão celular



**Fonte:** arquivo da pesquisa

A turma participante desta pesquisa contou com 33 alunos da 1ª série do Ensino Médio, que optaram por um Itinerário Formativo que não priorizou a formação Matemática, porém, no dia da aplicação da tarefa, estavam presentes 25 alunos. A tarefa foi aplicada de maneira individual e a produção das atividades matemáticas não teve identificação para o contexto dessa pesquisa.

Para o desenvolvimento deste artigo optamos por somente apresentar uma síntese das análises realizadas dos itens **a**, **b** e **c** da sequência de tarefas propostas e, ao final, apresentamos os resultados da aplicação dessa sequência por completo.

O item **a** solicitava dos alunos que completassem a tabela presente nesse item até a 7ª divisão, seguindo as divisões que eram apresentadas no enunciado. Ao analisar as resoluções apresentadas pelos alunos, observamos que 16 dos 25 alunos completaram corretamente a tabela presente na tarefa, portanto tem-se 16 alunos que apresentaram a característica “estabelecer relações” (CER), pois estabeleceram corretamente a relação existente entre a quantidade de bactérias em função do número de divisões realizadas.

Observamos que os alunos que não obtiveram a resposta correta para esse item, ao realizarem a conversão dos registros em língua natural e figural para os registros tabular e numérico, acabaram confundindo em que momento se iniciava a primeira divisão celular. Sendo assim, constatamos que esses quatro alunos apresentaram parcialmente a característica “estabelecer relações” (CER).

No item **b** foi solicitado aos alunos que determinassem uma lei de formação que descrevesse a situação proposta. Três alunos obtiveram uma expressão equivalente a função  $f(x) = 2^x$ , no qual  $x$  é o número de divisões e  $f(x)$  a quantidade de bactérias. Esses estudantes apresentaram as características CM, CG, COD e CCS, pois conseguiram, a partir de estratégias (CM), estabelecer uma expressão algébrica (CG) que representasse a situação descrita, além de compreenderem as propriedades do termo desconhecido sem realizar operações inexistentes no processo (COD), e por fim, dando significado para o elemento desconhecido (CCS).

Ao todo, 21 alunos apresentaram uma expressão não condizente com a expressão esperada ( $f(x) = 2^x$ ), sendo que, 17 alunos apresentaram uma expressão equivalente a função  $f(x) = 2x$ , ou seja, obtiveram uma função afim ao invés de apresentar uma função exponencial como esperado. Dos demais alunos, um apresentou uma relação somando as quantidades encontradas, outro aluno apresentou a expressão “ $x.y^2$ ”, na qual  $x$  é o número de divisões e  $y$  o número de bactérias, e por fim, dois alunos não responderam a esse item.

O item **c** consistiu na construção do gráfico referente à situação descrita nos itens **a** e **b**, para o qual somente um aluno apresentou um gráfico próximo ao esperado. Os demais 23 alunos que erraram a representação gráfica, apresentaram uma reta para o gráfico, utilizaram gráfico de barras, ou representaram a situação descrita por meio do gráfico de pontos. Somente um dos 25 alunos não respondeu a atividade solicitada.

Observadas as respostas apresentadas pelos 25 alunos participantes para esses três itens (a, b e c), concluímos que somente dois alunos apresentam a característica CCS de forma parcial, pois os dois alunos não conseguiram reconhecer que o registro gráfico da função como uma progressão de pontos exponencial, ou seja, não identificaram o domínio da função.

Sistematizamos a análise desses três itens na “Tabela 1”.

**Tabela 1:** Características do PA mobilizadas nos itens **a**, **b** e **c**

Características do PA	Alunos com a manifestação da característica do PA
Sem características do PA	5
Estabelecer relações (CER)	20
Modelar (CM)	16
Generalizar (CG)	3
Operar com o desconhecido como se fosse conhecido (COD)	2
Construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (parcial) (CCS)	2

Fonte: arquivo da pesquisa

Ao analisarmos as características do Pensamento Algébrico dos itens **a** até **g** e a partir das descrições dos seus níveis de desenvolvimento, propostos por Almeida (2016) e Almeida e Câmara (2019), construímos a "Tabela 2", na qual quantificamos o número de alunos em seus respectivos níveis do Pensamento Algébrico (PA).

**Tabela 2:** Níveis do desenvolvimento do PA apresentados pelos alunos

Nível de desenvolvimento do PA	Quantidade de alunos
Nível 0	3
Nível 1	15
Nível 2	Nenhum aluno
Nível 3	2

Fonte: arquivo da pesquisa

Analisando os resultados presentes nessa tabela, observamos que 23 alunos apresentaram resultados nos níveis 0 e 1 e que somente dois alunos estão

no nível 3. Os alunos estarem nos níveis 0 e 1 era uma situação já esperada por nós e descrita na análise *a priori*, pois os alunos optaram em cursar o Itinerário Formativo de Humanas, devido à dificuldade que apresentavam em matemática.

Dos alunos presentes no nível 0 (ausência de pensamento algébrico), dois não apresentaram nenhuma característica do pensamento algébrico e três apresentaram a característica “estabelecer relações” (CER) que, segundo Almeida (2016) é algo esperado, pois essa característica é a primeira a ser mobilizada no desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Destacamos que ter a presença de uma das características do Pensamento Algébrico, segundo Almeida e Câmara (2017), não significa que houve evidência desse processo, por isso os três alunos, apesar de apresentarem a característica CER, estão no nível 0.

Dos alunos presentes no nível 1 (pensamento algébrico incipiente), 17 alunos mobilizaram duas características, sendo elas, “estabelecer relações” (CER) e “modelar” (CM). Nesse caso, foram alunos que conseguiram estabelecer uma relação entre a quantidade de bactérias e o número de divisões, além de apresentarem estratégias válidas para se obter os resultados apresentados, porém não conseguiram apresentar um modelo algébrico válido para a situação propostas. Um aluno apresentou três características do pensamento algébrico (CER, CM e CG), porém não foi possível determinar se o aluno mobilizava significativamente as características “operar com o desconhecido como se fosse conhecido” COD e “construir significado para linguagem e o objeto algébrico” (CCS). Por fim, somente dois alunos apresentaram o Pensamento Algébrico consolidado (nível 3).

Observamos também a dificuldade dos alunos em realizarem as conversões dos registros tabular e em língua materna para os registros algébrico e gráfico, principalmente na conversão do registro tabular para o algébrico, pois somente três alunos apresentaram a característica “generalizar” CG, ou seja, conseguiram apresentar um registro algébrico que estabelece a quantidade de bactérias em função do número de divisões. Constatamos, como destacado por Duval (2012, p. 270), que o “recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações”.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa tínhamos como objetivo compreender em quais níveis do desenvolvimento do Pensamento Algébrico os alunos se encontravam quando resolviam atividades envolvendo Função exponencial.

Portanto, ao analisarmos as respostas apresentadas pelos alunos para as duas sequências de atividades propostas, tínhamos a intenção de verificar se esse grupo de alunos apresentava níveis 0 e 1 no desenvolvimento do Pensamento algébrico, ou seja, se esse grupo de alunos apresentava ausência desse processo ou nível algébrico incipiente.

Analisando individualmente os resultados obtidos pelos alunos, observamos um desempenho dentro das projeções que havíamos estabelecido na análise *a priori*, na qual a maioria dos alunos participantes demonstravam desenvolvimento no nível 1 do pensamento algébrico (pensamento incipiente), ou seja, ainda estavam no início do processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Observamos que os alunos que mobilizaram a conversão entre dois tipos de registro de representação de forma independente, ou seja, realizaram conversões entre registros além daqueles solicitados na tarefa proposta, obtiveram nível de desenvolvimento do pensamento algébrico consolidado (nível 3).

Com os resultados obtidos destacamos que ao determinarmos o nível de desenvolvimento do PA com atividades individuais, podemos compreender e desenvolver, em sala de aula, atividades que estejam mais próximas dos níveis de desenvolvimento algébrico das turmas, observando assim possíveis potencialidades e dificuldades que os alunos possam ter para iniciar o desenvolvimento de novos conteúdos em Matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson Ramos. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Recife, 2016.

ALMEIDA, Jadilson Ramos; CÂMARA, Marcelo. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p. 34-60, jan-jun. 2017.

ALMEIDA, Jadilson Ramos; CÂMARA, Marcelo. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes dos anos finais do ensino fundamental: o caso dos problemas de partilha. **Revista Educação Matemática e Pesquisa (EMP)**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 167-187. 2019.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Vol. 3, n. 1, p. 62-77, UFSC: 2008.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.