



Pavani, V.V.; Oliveira, P.C. & Lima, R.F. (2025). Tarefas didático-matemáticas no estudo de noções da Geometria do Taxista: as representações matemáticas em foco. *Anais do Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática (SENALEM): Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática* (pp. 1-17). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: <https://eventos.pucsp.br/anais/5-senalem/1341772-tarefas-didatico-matematicas-no-estudo-de-nocoes-da-geometria-do-taxista-as-representacoes-matematicas-em-foco/>

TAREFAS DIDÁTICO-MATEMÁTICAS NO ESTUDO DE NOÇÕES DA GEOMETRIA DO TAXISTA: AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS EM FOCO.

Victor Vaz Pavani

Universidade Federal de São Carlos. E-mail: victorvazpavani@ifsp.edu.br

Paulo Cesar Oliveira

Universidade Federal de São Carlos. E-mail: paulooliveira@ufscar.br

Reinaldo Feio Lima

Universidade Federal do Pará. E-mail: reinaldo.lima@ufpa.br

Eixo Temático - Eixo 6: Semiótica, Linguagem e Educação Matemática.

Resumo

O tópico geometria não-euclidiana não faz parte dos componentes curriculares na formação de licenciandos de uma universidade pública. Propomos neste artigo a apresentação de uma tarefa didático-matemática composta de dois problemas, com o objetivo de analisarmos as representações matemáticas mobilizadas e coordenadas por onze estudantes em contexto de formação inicial de professores. Com base no aporte teórico-metodológico do conhecimento especializado do professor que ensina matemática, as discussões e resultados sobre as produções escritas dos licenciandos propiciaram tanto reflexões sobre o conhecimento geométrico empregado na resolução dos problemas propostas quanto na estrutura das mesmas para o desenvolvimento do tema em estudo.

Palavras-chave: Geometria não-euclidiana. Ensino Superior. MTSK. Cognição.

Introdução

O conhecimento dos professores que ensinam matemática tem sido objeto de investigação levando em conta as especificidades no conhecimento matemático e pedagógico, como um fator que contribui de forma efetiva a aprendizagem dos alunos em sala de aula, conforme atesta pesquisas como de Almeida e Ribeiro (2021).

Historicamente, pesquisadores como Shulman (1986), tem dedicado esforços na configuração de uma base de conhecimento voltada à prática docente, como o caso do seu pioneirismo na conceituação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* - PCK); referência para o desenvolvimento de outras pesquisas nessa área.

Avanços nessa temática foi dado por um grupo de pesquisadores liderados por Débora Ball ao trazer a discussão sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematics Knowledge for Teaching* - MKT). Estruturado em dois grandes blocos (Conhecimento do

V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática.
"Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática".
PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.



Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo), subdivididos em seis domínios, avançam na caracterização desse conhecimento específico para o ensino de Matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Posteriormente, um grupo de pesquisadores liderados pelo professor espanhol José Carrillo propôs um novo marco teórico fundado nos avanços da literatura e na ideia do conhecimento especializado do professor que ensina Matemática (CARRILLO *et al*, 2018). Embora estejamos diante de um modelo teórico analítico muito recente, o mesmo tem ganhado reconhecimento e notoriedade nas pesquisas educacionais, através da *Red Iberoamericana MTSK*, que conta com representantes dos mais diversos países como Espanha, Portugal, México, Equador, Peru, Chile e, de modo especial, Brasil.

Estruturamos a escrita desse texto apresentando apenas a caracterização de um subdomínio, o Conhecimento de Tópicos (*Knowledge of Topics* - KoT), a tarefa didática-matemática envolvendo noções de geometria não-euclidiana e a discussão e resultados das atividades dos licenciandos.

Conhecimento dos tópicos (KoT)

O modelo MTSK considera o conhecimento especializado do professor dividido em dois domínios; o Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge* - MK) e o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK)); ambos permeados pelas crenças docentes acerca dos conhecimentos da Matemática e do ensino e aprendizagem da disciplina.

O primeiro domínio contempla os subdomínios Conhecimento de Tópicos (KoT), Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM) e Conhecimento das Práticas em Matemática (KPM). Já o domínio do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK) engloba os subdomínios do Conhecimento do Ensino de Matemática (MKT), do Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (KFLM) e do Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem em Matemática (KMLS).

No que diz respeito ao foco dessa pesquisa, o Conhecimento de Tópicos (KoT) é composto de quatro categorias: (a) definições, propriedades e seus fundamentos; (b) fenomenologia e aplicações; (c) registros de representação; e (d) procedimentos (CARRILLO *et al.*, 2018). No que diz respeito à fenomenologia, segundo Almeida e Ribeiro (2021, p.7),



inclui “o conhecimento do professor acerca dos fenômenos que podem gerar um conhecimento matemático e dos contextos, dos usos e das aplicações de um tópico matemático ensinado.”

Em relação aos registros de representação semiótica proposto por Duval (2011), tal referencial possibilita compreender de que maneira os estudantes mobilizam e coordenam representações semióticas entre registros na relação com a aprendizagem de conceitos matemáticos, através de atividades cognitivas como o tratamento e a conversão das informações ao longo do processo de aprendizagem.

O tratamento ocorre quando uma transformação da representação semiótica é realizada dentro de um mesmo registro, mantendo-se o teor da informação no mesmo sistema semiótico. Por exemplo, ao calcular o fatorial do número 5, cuja representação simbólica no registro numérico é $5!$, o resultado esperado é um número natural obtido pelo produto de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ que resulta 120.

Já a conversão, por sua vez, caracteriza-se pela mudança de uma representação semiótica para outra entre registros, de modo que o indivíduo seja capaz em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos. Esse movimento é essencial porque amplia as possibilidades de compreensão e favorece a comunicação matemática. Com base nos dois problemas propostos nesse relato de pesquisa, podemos exemplificar a atividade de conversão da representação semiótica entre o registro gráfico para localização de coordenadas e o registro algébrico para estabelecer relação entre distâncias de dois pontos.

Na próxima seção abordamos a estrutura da tarefa didático-matemática composta por dois problemas para abordar noções de geometria não-euclidiana, conforme pressupostos de Kaleff e Nascimento (2004).

Caracterização da tarefa no modelo MTSK

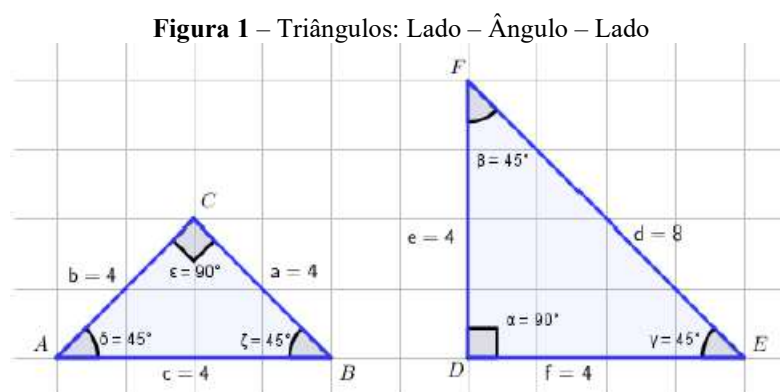
A proposta da tarefa didático-matemática, segundo Flores, Gutierrez e Camacho (2024) é formativa, porém o que interessa é a visão e construção do conhecimento especializado a partir da recuperação do conhecimento didático do conteúdo na perspectiva de Shulman (1986), na/desde/para a formação inicial docente. Em relação ao conhecimento especializado do professor de matemática, a formulação de tarefa dessa natureza, adquire uma conotação específica em relação ao subdomínio que se pretende desenvolver. Segundo Flores, Gutierrez V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática. "Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática". PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.

e Camacho (2024) não se trata de descartar as conexões que podem ser estabelecidas entre diferentes subdomínios do modelo MTSK, mas dependendo do subdomínio que se queira desenvolver, tais tarefas tem uma forma, uma função e um foco específico.

No texto em questão a tarefa didático-matemático foi adaptada de Kaleff e Nascimento (2004) ao propor o estudo da geometria não-euclidiana com propostas de problemas que permitem apresentar a negação de um axioma euclidiano, as quais envolvem maquetes, mapas e esquemas gráficos.

Krause (1986) aponta que a Geometria do Táxi (ou *Taxicab Geometry*) exibe uma considerável proximidade conceitual com a Geometria Euclidiana em seus elementos básicos. Os conjuntos de pontos e as definições de linhas permanecem inalterados, e a medição de ângulos é consistentemente aplicada. A divergência fundamental entre as duas geometrias reside exclusivamente na função de distância (ou métrica). Enquanto na Geometria Euclidiana a distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é determinada pelo comprimento do segmento de reta que os une, na Geometria do Táxi, essa distância é calculada como a soma dos valores absolutos das diferenças entre suas coordenadas horizontal e vertical: $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Essa alteração na métrica tem implicações diretas na validade dos axiomas; notavelmente, o axioma Lado-Ângulo-Lado (LAL) para a congruência de triângulos deixa de ser válido nesta geometria, embora o Quinto Postulado de Euclides, concernente às retas paralelas, seja mantido.

Segundo Pavani (2017) ter LAL não é garantia que os triângulos serão congruentes, ou seja, não é válido o caso LAL. A figura 1 mostra uma situação com $\overline{AC} \cong \overline{ED}$, $\hat{C} \cong \hat{D}$ e $\overline{CB} \cong \overline{DF}$, porém $\overline{AB} \neq \overline{EF}$.



Fonte: Pavani (2017), p. 35)

Por se tratar de uma atividade introdutória, as questões apresentadas para os licenciandos não nomeiam a Geometria do Taxista, assim como não exigem o conhecimento de sua métrica, porém o aluno poderá ter seu primeiro contato com a limitação da Geometria Euclidiana para esse contexto e eventualmente levantar algumas hipóteses que sistematizaria o que está estudando.

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa e interpretativa Creswell (2014, p.57), por buscar compreender conceitos e definições metodológicas que orientam a investigação científica a partir do levantamento e análise de dados. Nessa perspectiva, Minayo (2009, p.23) reforça que a pesquisa envolve “[...] uma atitude e uma prática teórica de constante busca que define um processo intrinsecamente inacabado e permanente”.

Para a produção de dados, 11 professores em formação inicial, regularmente matriculados na disciplina “Metodologia e Prática do Ensino de Matemática” de uma universidade pública, se reuniram em 6 grupos para desenvolver atividades matemáticas na resolução de dois problemas geométricos. Os mesmos serão apresentados na sequência, com resultados e discussões pertinentes ao subdomínio Conhecimento de Tópicos (KoT) do modelo MTSK.

Primeiro problema da tarefa didático-matemática

O enunciado da tarefa proposta contempla um esboço de maquete, conforme figura 2.

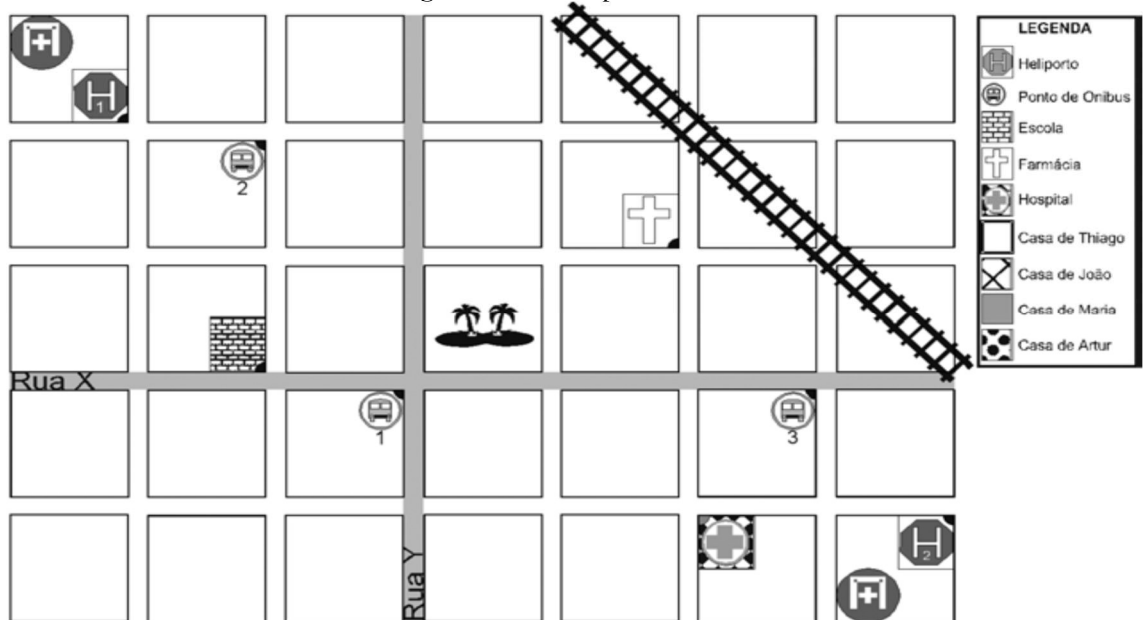
Figura 2 – Esboço da maquete



Fonte: Kaleff (2004, p. 17)

O conteúdo da maquete está representada na forma de malha quadriculada, de acordo com o conteúdo da figura 3.

Figura 3 – Malha quadriculada



Fonte: Kaleff (2004, p. 18)

Na Figura 3 está desenhada a representação da maquete do bairro onde moram Maria, João, Tiago e Arthur. As linhas simbolizam ruas, os quadradinhos formados pelas linhas representam os quarteirões da cidade e os pontos negros a entrada de cada local (casa, escola, entre outros). Chama-se quadra cada lado de um quarteirão. Esta será considerada como *1 (uma) unidade de medida de comprimento*.

- Se Maria quer ir à casa de Arthur, quantas quadras ela irá andar se pegar o caminho mais curto? Marque na malha os possíveis caminhos de Maria.
- Agora, João quer ir até à casa de Tiago, mais deve primeiro passar pela casa de Arthur. Quantas quadras João percorre até a casa de Tiago, tomando o caminho mais curto? Existem outros caminhos do mesmo tamanho?
- Se escolher sempre o menor caminho entre dois lugares, quantos caminhos diferentes você pode fazer se esses lugares estiverem na mesma rua?
- Que análise você faz das respostas obtidas nos itens anteriores do problema 1?

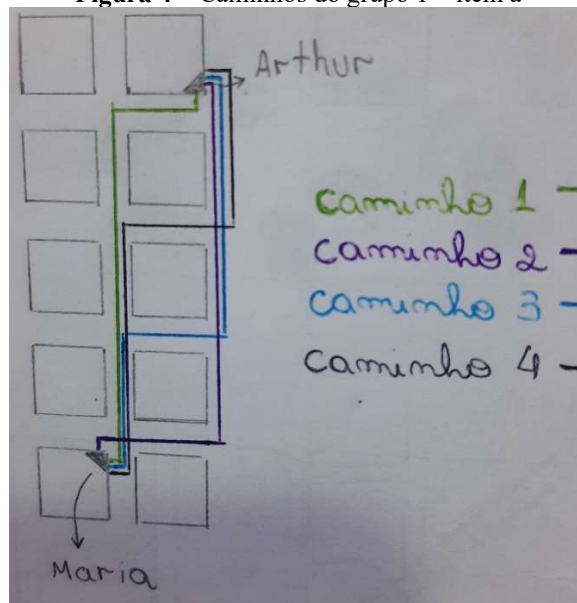
Na perspectiva de tarefa didático-matemática, o enunciado permite que o aluno se depare com o “andar do táxi”, sendo necessário andar pelas ruas e perceber que a menor

V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática.
"Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática".
PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.

distância entre dois pontos, nessa situação proposta, nem sempre será uma linha reta. Ele também aborda as diferentes formas de chegar ao mesmo lugar, ou seja, em algumas situações diferentes caminhos levam de uma casa até a outra e todos eles possuem a menor distância.

O grupo 1 representou os possíveis caminhos entre a casa de Maria e Arthur (item a), tornando-os visuais, conforme “figura 4”.

Figura 4 – Caminhos do grupo 1 – item a



Fonte: Arquivo da pesquisa (setembro-2025)

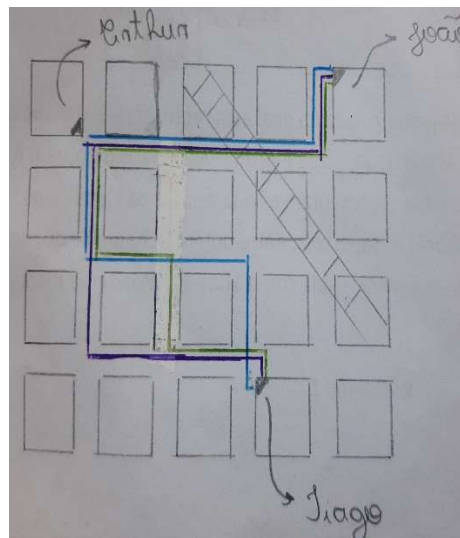
De acordo com o protocolo escrito do grupo 1, *se Maria quer ir a casa de Arthur, pegando o caminho mais curto, ela irá andar 4 quadras. Maria tem 4 caminhos possíveis, considerando o menor caminho possível.* De acordo com os diferentes tipos de representações semióticas classificados por Duval (2003), podemos dizer que o grupo 1 utilizou um registro figural não-discursivo e multifuncional para o conteúdo da figura 4, pelo fato do seu tratamento não envolver algoritmo. No entanto, essa forma de registro figural não possui propriedades geométricas e, portanto, não pode ser caracterizada por meio dos pressupostos que Duval (2012a, 2012b) utiliza para analisar a aprendizagem em geometria.

O grupo 2, optou por trabalhar com uma representação usando letras (C – cima, D – direita, B – baixo e E – esquerda) para indicar o sentido do percurso em relação às ruas, na primeira questão. De acordo com esse grupo, *é necessário andar 4 casas, podendo variar a configuração conforme o esquema abaixo, já que é necessário andar 3 para cima e uma para a direita: CCCD, CCDC, CDCC e DCCC.* Em termos de representação semiótica temos um

conjunto de possibilidades expresso de forma ordenada em um registro simbólico de natureza monofuncional por conta do seu tratamento envolver um algoritmo na forma discursiva.

Na análise da resposta ao “item b”, observou-se que tanto o grupo 1 quanto o grupo 2 mantiveram o mesmo tipo de registro de representação semiótica mobilizado na resposta ao item anterior. O grupo 2 teve êxito ao replicar o processo de enumerabilidade, apresentando um conjunto de 6 possibilidades de João ir à casa de Tiago passando pela casa de Arthur. Já o grupo 1 não teve o mesmo êxito no desempenho da resposta, pois não considerou a possibilidade de retroceder por uma parte do percurso já trilhado, para caminhar um total de 8 quadras, gerando 6 rotas possíveis, ao invés de 3 caminhos, conforme conteúdo da figura 5:

Figura 5 – Caminhos do grupo 1 – item b



Fonte: Arquivo da pesquisa (setembro-2025)

No “item c”, a discussão centra-se nas distâncias horizontais ou verticais, que correspondem às situações em que os pontos (casas) estão alinhados na mesma rua. Nesses cenários específicos, as distâncias calculadas são equivalentes tanto na Geometria do Taxista quanto na Geometria Euclidiana. Todos os grupos participantes apresentaram corretamente essa relação, inferindo que haveria um único caminho possível.

A resposta do grupo 1 para o “item c” evidenciou a compreensão do conceito de variação de coordenadas. Contudo, a ausência da preocupação com o uso do valor absoluto é notável neste ponto, um aspecto crucial para garantir que as distâncias sejam sempre positivas e evitar resultados negativos que seriam inconsistentes com a natureza da medição de distâncias. Mais



especificamente, o grupo 1 manteve-se essencialmente na atividade cognitiva de tratamento da representação semiótica no registro de língua natural, porém demonstrou ausência conceitual da noção de valor absoluto ao tentar produzir significado na medida de distância em Δx ou Δy , conforme atestamos no protocolo escrito: *se os dois lugares estiverem na mesma rua (isto é, não há diferença na coordenada vertical ou horizontal), então um caminho mínimo é simplesmente andar ao longo da própria rua. De tal maneira, a distância mínima será igual a variação no eixo x ou y (Δx ou Δy) e há exatamente 1 caminho mínimo (ir direto ao longo da rua).*

O “item d” dessa tarefa didático-matemática teve como objetivo instigar a produção escrita dos licenciandos com o objetivo de analisar a categoria da fenomenologia, mais especificamente, possíveis apreensões conceituais no contexto da Geometria. Nesse contexto, o grupo 1 expressou uma compreensão aprofundada da noção de distância na Geometria do Taxista, ressaltando a obrigatoriedade de seguir os percursos das ruas e destacando as diversas possibilidades de caminhos que podem emergir, conforme relato: *como não podemos atravessar quarteirões em diagonal, o caminho mais curto de fazer determinado percurso é caminhar primeiro algumas quadras em uma direção (horizontal ou vertical) e depois em outra, até alinhar-se à posição do destino.* Essa lógica garante que o número mínimo de quadras a ser percorrido seja sempre a soma das diferenças entre as posições horizontais e verticais dos dois locais.

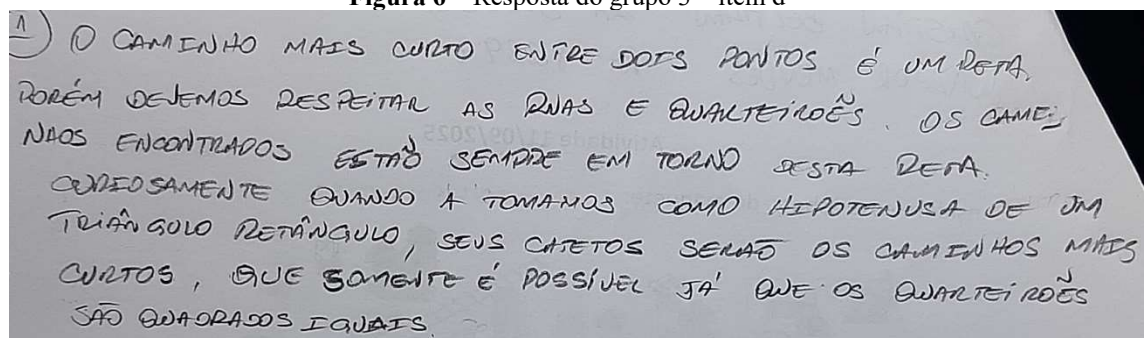
Quando a distância envolve deslocamentos em duas direções diferentes, há várias maneiras equivalentes de chegar ao destino e mais de uma opção com o mesmo comprimento mínimo, já que ao alternar os movimentos horizontais e verticais em diferentes ordens gera caminhos distintos.

Já em situações em que os dois pontos estão alinhados em uma mesma rua, não há alternativas (visando o caminho mais curto): o único caminho possível é seguir em linha reta pela rua.

O problema mostra que, em uma malha ortogonal, a noção de “menor distância” está ligada ao modo com a malha impõe restrições de movimento (KALEFF, 2004). Portanto, compreender o menor percurso envolve articular a intuição espacial com a lógica combinatória (situações em que há múltiplas rotas equivalentes e outras em que a solução é única).

O grupo 3 abordou a distinção entre a Geometria do Taxista e a Geometria Euclidiana, observando que suas métricas de distância se diferenciam, exceto quando os pontos se encontram na mesma linha horizontal ou vertical. Ao identificarem a relação com um triângulo retângulo, associando a hipotenusa à distância euclidiana e a soma dos catetos à distância do Taxista, o grupo aproximou-se do entendimento da fórmula que define o cálculo da distância na Geometria do Taxista, conforme explicitado na figura 6.

Figura 6 – Resposta do grupo 3 – item d



Fonte: Arquivo da pesquisa (setembro-2025)

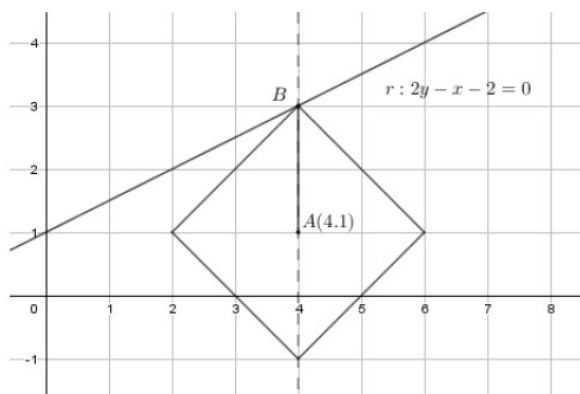
O grupo 5, em sua análise, reportou não ter identificado observações particulares ou distinções significativas nos itens precedentes.

O segundo problema selecionado para estudo com base em Kaleff (2004), concentrou-se na distância de um ponto a uma reta. É notável que, mesmo sem uma exploração prévia da representação da circunferência na Geometria do Taxista, os alunos foram capazes de inferir que, nas vielas 1 e 2, a distância deveria ser calculada de uma única forma: por meio da medida horizontal (para a via 2) e vertical (para a via 1). Em contrapartida, para a via 3, os grupos observaram a existência de múltiplos locais ao longo da via onde uma barraca poderia ser montada, mantendo-se, em todos eles, a mesma distância mínima.

Pavani (2017) aprofunda a exploração da distância de um ponto a uma reta (ou segmento), utilizando o recurso da "expansão da circunferência" da Geometria do Taxista. A partir disso, ele formaliza a diferença que os alunos perceberam intuitivamente, mas não conseguiram nomear, em relação à inclinação das retas (ou segmentos). O autor categorizou essa relação em três casos, conforme o coeficiente angular (m) da reta: a distância pode ser vertical se $|m| < 1$, horizontal quando $|m| > 1$, ou pode ser tanto vertical quanto horizontal nos casos em que $|m| = 1$.

A figura 7 ilustra o caso em que o módulo do coeficiente angular (m) é menor que 1 ($|m| < 1$), sendo representada pela reta $r: 2y - x - 2 = 0$. Nesse cenário específico, a distância foi determinada traçando uma reta vertical que intercepta o ponto A.

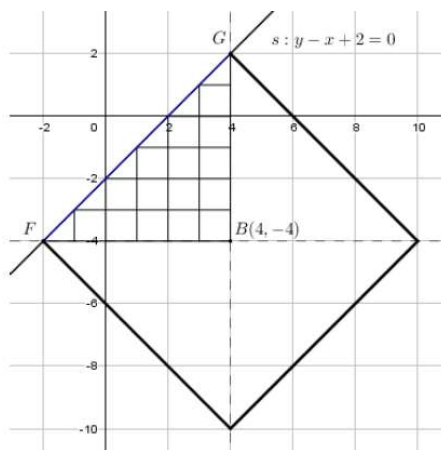
Figura 7 – Distância vertical



Fonte Pavani (2017, p. 40)

A figura 8 exemplifica o caso em que o módulo do coeficiente angular é igual a 1 ($|m| = 1$), com a reta s sendo representada pela equação $s: y - x + 2 = 0$. Neste cenário, observa-se que tanto a reta vertical quanto a horizontal, ao interceptarem a reta s , resultam na mesma distância mínima. Essa equivalência se estende a outros caminhos que conduzem até o segmento $\overline{FG}$.

Figura 8 – Distância horizontal ou vertical



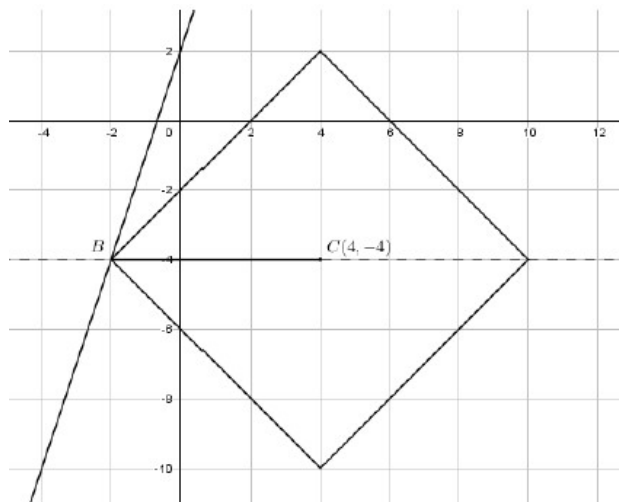
Fonte: Pavani (2017, p. 41)

No último exemplo, ilustrado na figura 9, observamos o caso em que o módulo do coeficiente angular é maior que 1 ($|m| > 1$), representado pela reta $t: y - 3x - 2 = 0$. Neste

V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática.
 "Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática".
 PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.

cenário, a distância é determinada ao traçar uma reta horizontal que passa pelo ponto C, a qual intercepta a reta t no ponto B.

Figura 9 – Distância horizontal

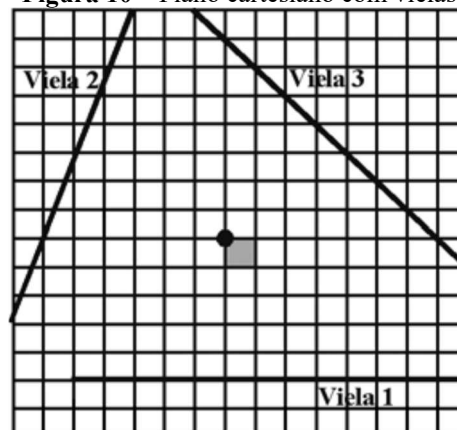


Fonte: Pavani (2017, p. 41)

Segundo problema da tarefa didático-matemática

O enunciado dessa tarefa contempla um plano cartesiano, conforme conteúdo da figura 10.

Figura 10 – Plano cartesiano com vielas



Fonte: Kaleff (2004, p. 35)

José é um vendedor de cocos que vende o seu produto pelo preço de um real. No início José tinha pouco dinheiro para investir nos seus negócios e vendia os cocos em sua residência.

V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática.
 "Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática".
 PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.



Agora, porém, as vendas estão indo muito bem e José tem a oportunidade de ampliar o seu negócio montando três barracas para vender seus cocos, colocando uma barraca em cada uma das vielas destinadas ao comércio de vendedores ambulantes do seu bairro. Estas pequenas ruas foram construídas como locais para as pessoas venderem seus produtos, e não é permitida a passagem de carros.

Na figura 10, está representada a situação destas vielas no bairro onde José vive. Neste desenho, o quadrado cinza representa a localização da casa de José, o ponto preto indica a sua porta e as linhas pretas, as vielas dos vendedores.

- Será que você pode ajudar José a encontrar o lugar, isto é, o ponto da Vela 1, mais perto de sua casa? Descreva o que você fez para resolver a questão.
- Agora, você pode ajudar José a encontrar o ponto da Vela 2, mais próximo de sua casa. Descreva o que você fez para resolver esta questão.
- Agora, será que você pode ajudar José a encontrar o lugar mais cômodo para ele instalar a sua barraca na Vela 3?
- O que você percebeu, em termos de geometria, na resolução dos itens anteriores?

Na resolução dos itens "a" e "b" do problema, todos os grupos conseguiram identificar o método para calcular a menor distância. O grupo 5, em sua resposta, destacou que, nesses dois casos específicos, a distância mínima seria obtida ao percorrer uma linha reta em direção à viela: horizontalmente para alcançar a viela 2, e verticalmente para a viela 1.

O grupo 4, ao abordar o item "a", aplicou o conceito da Geometria Euclidiana, determinando a distância por meio de uma reta perpendicular entre a casa de José e o ponto da viela 1 mais próximo. Contudo, ao analisar o item "b", este mesmo grupo ponderou que a aplicação da perpendicular não seria viável, uma vez que implicaria a travessia por outras edificações. Dessa forma, o grupo 4 demonstrou a percepção da distinção entre as geometrias envolvidas, agora no contexto da distância de um ponto a uma reta.

Para o item "c", os grupos identificaram não apenas a menor distância, mas também a existência de múltiplos caminhos que levam a ela. O grupo 2, especificamente, detalhou o número de possibilidades para esses caminhos: *vemos que o menor caminho da viela é de 7 quadras, mas há outras configurações, nesse caso temos 2^7 caminhos possíveis. Ele pode andar para cima ou para a direita uma quantidade de zero a sete vezes cada e chegar em um ponto da viela 3.*

V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática.
"Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática".
PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.



No item "d", o último da questão, o grupo 3 explicou os procedimentos de cálculo da distância para as vielas 1 e 2. Além disso, o grupo reiterou a situação previamente observada por alguns dos outros grupos, que se refere à formação de um triângulo isósceles quando se tenta aplicar uma das duas formas de cálculo de distância anteriores, seja a horizontal ou a vertical. Em detalhes, apresentamos o protocolo escrito desse grupo: *da casa de José para a viela 1 e 2, o caminho mais próximo é uma reta e, portanto, é única. Porém, da casa de José para a viela 3, a casa está exatamente no vértice de um triângulo isósceles quando tomamos a viela 3 como base com o triângulo isósceles possui dois lados e dois ângulos iguais, uma vez que todos os quarteirões possuem a mesma dimensão, todos os caminhos da casa de José até a viela 3, terão a mesma distância.*

Em termos de representação semiótica, embora a essência das atividades dos alunos tenha envolvido predominantemente o registro em língua natural, observou-se uma atividade cognitiva de conversão dessa representação, na mobilização e coordenação entre o registro da língua natural e o numérico. O conteúdo do registro numérico envolveu o raciocínio combinatório expresso tanto na potência 2^7 como sistematização do número de caminhos possíveis (grupo 2), quanto na análise geométrica do triângulo isósceles para expressar os possíveis caminhos da casa de José até a viela 3, todos com mesma distância (grupo 3).

Essa tarefa didático-matemática, em relação ao Conhecimento de Tópicos (KoT) emergiu na análise das atividades matemáticas dos licenciandos as seguintes categorias: (a) fenomenologia e aplicações quanto a utilização da noção da distância de um ponto a uma reta (ou segmento), utilizando o recurso da "expansão da circunferência" da Geometria do Taxista; (b) registros de representação na forma da língua natural e numérico e (c) procedimentos utilizados com base no raciocínio combinatório para a contagem de caminhos possíveis.

No que diz respeito ao raciocínio combinatório, Silva e Pessoa (2015) compreende que essa categoria de raciocínio é concebida quando se trata do ato de combinar, associar, juntar ou compor elementos de um dado conjunto. São habilidades de um raciocínio desenvolvido antes mesmo de que seja preciso usar operações combinatórias mais formais, ou seja, uma situação na qual há várias possibilidades de construção de agrupamentos e de caminhos e as mesmas precisam ser quantificadas.



Ao término da resolução desses dois problemas, propomos uma questão reflexiva, cujo teor das respostas dos licenciandos, será utilizada como parte das considerações finais desse relato de pesquisa.

Considerações finais

Propomos a seguinte questão para os licenciandos: *o que você pode relatar em termos da geometria aplicada na resolução desses problemas?*

Alguns grupos não entregaram o seu relato escrito. O grupo 1 destacou que a Geometria serviu como um instrumento essencial para a compreensão e a resolução de situações práticas do cotidiano, ou seja, *percebe-se que a geometria não aparece apenas como uma disciplina abstrata, mas como um instrumento para compreender e resolver situações práticas do cotidiano. Em todos os casos, a ideia de espaço estruturado, seja uma malha urbana, uma viela ou o posicionamento de ocorrências, orienta o raciocínio, suporte logístico e conduz às decisões mais adequadas.*

As atividades matemáticas dos licenciandos mostraram conexões intradisciplinar entre a geometria e o raciocínio combinatório no caso da possibilidade de mais de um caminho mínimo, a contagem dos percursos possíveis tornou-se uma questão de ordenação de movimentos.

De modo geral, a resolução dos dois problemas mostrou que a geometria aplicada não se limita a desenhar figuras ou calcular ângulos. Ela se torna um modo de interpretar o espaço e de orientar escolhas práticas.

Para o grupo 5, a métrica não euclidiana emergiu como o aspecto de maior proeminência em sua análise. Especificamente, a distância considerada por este grupo foi definida pela soma das diferenças modulares entre as coordenadas correspondentes dos pontos, caracterizando uma abordagem métrica distinta da Euclidiana tradicional.

Em sua análise, o grupo 6 evidenciou a crucialidade do plano cartesiano como ferramenta para o cálculo de distâncias, promovendo a mobilização e coordenação da representação semiótica na atividade de conversão entre o registro gráfico (localização de coordenadas) e algébrico (relação de distância entre pontos e ponto e reta (simbolizada por vielas)). Nas palavras do grupo 6, emerge a categoria procedimentos pertinente ao subdomínio V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática. "Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática". PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.



do Conhecimento de Tópicos (KoT): *foi necessário relacionar a posição dos objetos como coordenadas no plano cartesiano, aplicar a relação da distância entre dois pontos e entre ponto e reta (viela)*...

A análise das respostas fornecidas pelos 13 licenciandos reunidos em 6 grupos, permitiu inferir que a tarefa didático-matemática constituiu um meio eficaz para acionar categorias do KoT, em especial, a apreensão conceitual de noções introdutórias da Geometria do Taxista. Adicionalmente, houve a possibilidade dos licenciandos constatarem por meio da diversidade de representações semióticas que a Geometria Euclidiana apresenta limitações consideráveis ao abordar desafios práticos cotidianos que envolvem a determinação de distâncias em cenários urbanos, como as ruas de uma cidade.

Referências

- ALMEIDA, A.R.; RIBEIRO, M. Potencialidades de uma tarefa para promover o conhecimento especializado do professor no tópico frações. **ACERVO: Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, São Paulo, v.3, p.1–18, 2021. Disponível em: <https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/31>. Acesso em: 22 set. 2025.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov. 2008. Disponível em: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17679/07_Content_Knowledge_for_Teaching_What_Makes_It_Speci.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 22 set. 2025.
- CARRILLO-YAÑEZ, J. *et al.* The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v.20, n.3, p.236-253, 2018. <https://core.ac.uk/download/pdf/287864575.pdf>. Acesso em: 22 set. 2025.
- CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. Porto Alegre: Editora Penso, 2014.
- DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.
- DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Mércies Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.1, p.97-117, 2012a.
- DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Mércies Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012b.
- FLORES, E. L.; GUTIÉRREZ, F. J. H.; CAMACHO, A. M. R Tareas didático-matemáticas y su papel en la construcción del MTSK de los docentes en formación. In FLORES, E. L; *et al* (Orgs). **Formación Docente Inicial: el papel del MTSK en el diseño de tareas formativas**. Mexico: Taberna libreria editores, 2024. p. 43-73.
- V SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática. "Matemática, discurso e linguagens: contribuições para a Educação Matemática". PUC-SP, Campus Marquês de Paranaguá, 03 a 05 de dezembro de 2025.



KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. D. Atividades Introdutórias às Geometrias Não- Euclidianas: o exemplo da Geometria do táxi. **Boletim GEPEM**, n. 44, p.11-42, 2004.

KRAUSE, E. F. **Taxicab geometry**: An adventure in non-Euclidean geometry. Courier Corporation, 2012.

MELO, C. I. B. de; MORIEL JUNIOR, J.G. Um marco teórico para o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK). **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v.5, n.1, 2021.

MINAYO, M. C. O desafio da pesquisa social. *In*: Minayo, M. C. (Org.). **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Rio de Janeiro: Vozes, 2009.

PAVANI, V. V. **A geometria do taxista como ferramenta de consolidação de conteúdos**. 126 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=150530018&id1=3794. Acesso em: 22 set. 2025.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p.4-14, 1986. Disponível em: <https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf>. Acesso em: 22 set. 2025.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A Combinatória: Estado da Arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.4, p. 670–693, 2015.