



## O MATERIAL MANIPULATIVO TANGRAM E O CÁLCULO DE ÁREA A PARTIR DA RELAÇÃO PARTE-TODO

*Reynaldo  
D'Alessandro Neto  
PROFMAT - UFSCar  
reynaldo.dalessandro@gmail.com*

*Mariana Capelin Fabricio  
PROFMAT - UFSCar  
mariana.capelin@gmail.com*

*Paulo César Oliveira  
Universidade Federal de São Carlos  
paulooliveira@ufscar.br*

**Resumo:** Este texto contempla o relato de uma experiência pedagógica envolvendo aplicações de tarefas com o material manipulativo Tangram para trinta e sete alunos de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual do município de Sorocaba, interior de São Paulo. A aplicação da tarefa é parte integrante de uma oficina pedagógica desenvolvida no âmbito da disciplina de Metodologia e Prática do Ensino de Matemática I, ministrada pelo prof Dr. Paulo César Oliveira no curso de Licenciatura de Matemática na UFSCar, campus de Sorocaba. A oficina como um todo passou por uma versão piloto aplicada para alunos do 6º semestre, matriculados na referida disciplina. O planejamento e aplicação das oficinas tem a participação de alunos das disciplinas de Estágio Supervisionado do referido curso, bem como integrantes do GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática). Os autores deste relato são membros desse grupo de pesquisa, sediado em nossa universidade. Para compor este texto, apresentamos duas tarefas contidas na programação da oficina pedagógica, as quais foram aplicadas para uma turma de 8º ano, cuja professora é a segunda autora deste relato de experiência docente. A produção dos registros escritos dos alunos foi analisada e apresentada para os alunos em formação inicial do 6º semestre da Licenciatura de Matemática. Um dos objetivos desta oficina foi proporcionar aos alunos a oportunidade de realizarem a seguinte exploração: é possível identificarmos polígonos distintos com mesma área? Os resultados apontaram que determinados alunos tiveram dificuldades para responder tal questão, pois era necessário calcular a área dos polígonos que integram o Tangram, inseridos em uma malha quadriculada, o que gerou erros quando houve necessidade de estabelecer a relação parte-todo.

**Palavras-chave:** tangram; ensino fundamental; material manipulativo.





## 1. Introdução

Na disciplina Metodologia e Prática do Ensino de Matemática I, componente da grade curricular para o 6º semestre da Licenciatura de Matemática da UFSCar (campus Sorocaba), optou-se como estratégia de ensino abordar os conteúdos da disciplina via oficinas pedagógicas; como uma forma de construção de saberes a partir da ação e reflexão, sem perder de vista a base teórica (PAVIANI, FONTANA, 2009). De acordo com essas autoras (2009, p.78), a oficina pedagógica atende, basicamente, duas finalidades: “(a) articulação de conceitos, pressupostos e noções com ações concretas, vivenciadas pelo participante ou aprendiz; e b) vivência e execução de tarefas em equipe, isto é, apropriação ou construção coletiva de saberes”.

Para atendermos tais finalidades utilizamos em nossas oficinas pedagógicas materiais manipuláveis, dentre eles, o Tangram. Com base em Lorenzato (2006) esse material é classificado como dinâmico, por permitir transformações trabalhadas na formação inicial dos alunos do 6º semestre e com uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental; tais como a decomposição de figuras planas, o cálculo de áreas e a equivalência das mesmas.

O modo de utilizar cada material didático depende fortemente da concepção do professor a respeito da matemática e da arte de ensinar. Com base em Lorenzato (2006), o uso dos materiais manipuláveis nas referidas turmas seguiu as recomendações:

- a) dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
- b) incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
- c) mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das tarefas por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
- d) realizar uma escolha responsável e criteriosa do material; planejar com antecedência as tarefas, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às





necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo e sempre que possível;

e) estimular a participação na confecção do material.

Apresentamos nas demais seções as fases que temos utilizado nos planejamentos de nossas oficinas pedagógicas: a) revisão bibliográfica de teses e dissertações com destaque aos aportes teóricos e metodológicos envolvendo determinado material manipulável; b) elaboração das tarefas; c) análise da produção dos registros escritos pelos alunos.

## **2. Contribuição da produção acadêmica no estudo do Tangram como um material manipulativo/recurso didático**

Para encontrar a produção acadêmica que vem sendo feita em relação ao tema, recorreremos ao banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES (<http://www.capes.gov.br/>) e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD (<http://bdtd.ibict.br/>) para a captação das pesquisas para nossa revisão bibliográfica. Para a triagem dos trabalhos utilizamos o uso de palavras-chave: tangram, material concreto, material manipulativo, ensino fundamental.

A busca gerou apenas cinco dissertações, duas oriundas de mestrados em Educação (SANTANA (2006), SILVA (2011)), uma em Educação Matemática (OLIVEIRA (1998)) e duas em Matemática em Rede Nacional (GUIMARÃES (2015), MIRANDA (2015)).

Para cada relato de pesquisa apresentamos informações apontando como o autor concebe material manipulativo e os seus resultados e contribuições para o processo ensino-aprendizagem.

Na pesquisa de Santana (2006), a autora teve como objetivo investigar o uso de recursos didáticos (Tangram, Malhas e Poliminós) no estudo do conceito de área, em Livros Didáticos de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Dessa forma a sua análise procurou identificar nos livros didáticos de matemática a articulação de tais





recursos didáticos, na construção do conceito de área como grandeza autônoma. Destaca-se, como um importante papel do Tangram e Poliminós, a manipulação das peças na construção de diferentes figuras planas, servindo de suporte auxiliar na dissociação entre área e figura.

Para a autora, não é a manipulação dos objetos nem a construção de figuras em malhas que podem garantir a aprendizagem, mas, essas representações, possivelmente, contribuem para facilitar a reflexão e a compreensão sobre os aspectos geométricos e numéricos de área, ou seja, a construção de área como grandeza geométrica.

Os resultados de suas análises apontam para a utilização dos recursos didáticos (Tangram, Poliminós e Malhas) na comparação de área entre as figuras planas; na produção de figuras planas, na construção de uma classe de equivalência de área e nas medidas não convencionais de área, com escolha de diferentes superfícies unitárias, correspondendo às peças ou ladrilhos dos diferentes recursos.

Silva (2011) investigou a aquisição do conceito de número racional em sua representação fracionária em um grupo de 36 estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, numa escola pública do município de Guarapari/ES.

O autor utilizou o Tangram e o Geoplano e, para ele, recursos didáticos podem auxiliar o professor na composição e decomposição de figuras planas, cálculos de perímetros e áreas de formas geométricas planas. Silva (2011) afirmou que isso se torna uma forma concreta de se apresentar o conceito de geometria e de fração ao educando. A manipulação desse objeto concreto, de forma planejada, pode auxiliar no processo de ensino de fração. O emprego desse material e os diálogos sobre algumas tarefas têm o potencial de auxiliar os alunos a compreender e, talvez, a ressignificar alguns conceitos de frações, como frações equivalentes.

Como resultados do estudo, Silva (2011) afirmou que o trabalho propiciou indícios de que a abordagem utilizada para a (re)construção do conceito dos números fracionários e suas representações, obteve resultados satisfatórios, que alertam para a necessidade de rever a prática de ensino de matemática, nas séries finais do ensino





fundamental. Uma mediação pedagógica apropriada possibilita a ampliação do horizonte de compreensão dos números fracionários do aluno.

A pesquisa de Guimarães (2015) teve como objetivo a elaboração de uma proposta de atividade educacional que envolve o ensino da Geometria Plana através de recursos manipuláveis.

Para esse autor, uma das ferramentas que o professor tem para desenvolver o processo de estudo se refere ao uso de um material didático adequado, que será qualquer instrumento que propicia o ensino-aprendizagem. O autor destacou que esse método faz com que os alunos sejam provocados à investigação do conhecimento, eles passam a questionar a ação, apreendem e aprimoram as habilidades. Com isso, Guimarães (2015) disse que esses recursos se tornam uma necessidade no cotidiano da sala de aula.

Como resultado, o autor constatou que esse processo incentivou a criatividade e o aprendizado dos alunos, além de instigar o trabalho em equipe. Pode constituir um diferencial na vida escolar dos alunos do Ensino Fundamental de qualquer escola por se tratar de materiais de baixo custo.

O trabalho de Miranda (2015) apresentou uma proposta para o ensino dos conceitos de área e de perímetro de polígonos, em sala de aula, que foi aplicada em uma turma do 7º Ano do Ensino Fundamental.

Com relação aos recursos didáticos, a autora acredita que atualmente, se faz cada vez mais necessário o uso de recursos metodológicos, que tornem mais atraentes as aulas de Matemática. Um desses recursos é o Tangram que, por ter forte apelo lúdico interdisciplinar, desperta o interesse dos alunos por mais conhecimento.

Na pesquisa foram propostas atividades com o uso do Tangram e, segundo Miranda (2015), foi possível perceber a construção do conhecimento de área e perímetro realizado pelos alunos. No decorrer das aulas que o Tangram foi utilizado, a autora percebeu que algumas dúvidas foram sanadas possibilitando a aprendizagem. Dessa forma, a autora acredita que isso aconteceu porque foram utilizados mecanismos e situações didáticas motivadoras. Por esta razão, Miranda (2015) argumentou que é de





grande importância que o professor propicie aos alunos momentos de descontração e experimentação, que favoreçam o processo de aprendizagem.

O estudo de Oliveira (1998) teve como objetivo identificar e analisar a percepção espacial envolvida nos procedimentos utilizados na composição de figuras geométricas. O autor utilizou nove alunos de 7º ano do Ensino Fundamental divididos em três grupos, conforme os instrumentos que lhes eram oferecidos, apenas peças do Tangram no papel cartão, apenas o sistema computacional Tegram ou ambos.

Oliveira (1998) destacou a importância da adequação do termo material manipulativo. O autor comenta que na literatura se encontra várias nomeações para os objetos que são utilizados de apoio para a aprendizagem. Por isso, Oliveira (1998) acredita que para o trabalho o mais adequado é material manipulativo, pois o Tangram permite ao aluno manuseá-lo durante a solução do problema.

Quanto aos resultados obtidos, Oliveira (1998) afirmou que a utilização do Tangram e do Tegram contribuiu significativamente para o desenvolvimento da percepção espacial e interligações, principalmente, na solução dos problemas que envolviam a discriminação e composição de figuras, mesmo em alguns casos levando mais ou menos tempo para a realização da atividade por parte do aluno.

### **3. Elaboração das tarefas**

O Tangram clássico é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Com essas peças podemos formar várias figuras, utilizando todas elas sem sobrepô-las. Esse quebra-cabeça, também conhecido como jogo das sete peças, é utilizado pelos professores de matemática como instrumento facilitador da compreensão das formas geométricas.

A partir de uma questão do vestibular da Universidade Federal de Santa Maria, no ano de 2006, cujo conteúdo apresentamos a seguir, foi construída as nossas tarefas, das quais duas delas apresentamos neste relato de experiência docente.

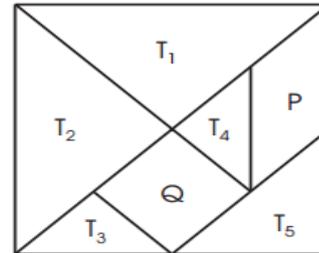


**Figura 1:** Questão de vestibular

**Questão - 11**

Para facilitar o estudo dos triângulos, a menina foi orientada por sua professora a trabalhar com jogos educativos. O TANGRAM é um quebra-cabeça de origem chinesa. É formado por cinco triângulos retângulos isósceles,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$ , um paralelogramo P e um quadrado Q que, juntos, formam um quadrado, conforme a figura apresentada. Se a área de Q é 1, é correto afirmar:

- a) A área do quadrado maior é 4.
- b) A área de  $T_1$  é o dobro da área de  $T_3$ .
- c) A área de  $T_4$  é igual à área de  $T_5$ .
- d) A área de  $T_5$  é  $1/4$  da área do quadrado maior.
- e) A área de P é igual à área de Q.



As tarefas foram aplicadas em duas aulas na sala do 8º ano “D” com 37 alunos do Ensino Fundamental, da Escola Estadual Júlio Bierrembach Lima. Essa turma possui a característica de ser muito participativa e comunicativa, porém com muita dificuldade em matemática. Sua escolha foi motivada pelo fato de ter sido trabalhado o Tangram no 6º ano do Ensino Fundamental com a mesma professora atual. Nesse primeiro contato os alunos observaram as características dos polígonos e ângulos envolvidos na composição do Tangram.

Para organizar a produção das atividades desses alunos, os quais foram divididos em 17 duplas e 1 trio, a professora solicitou e acompanhou a construção do Tangram em papel quadriculado, utilizando um espaço quadrado de 10cm de lado. Foi adotado como unidade de medida de área, o quadrado com 1cm de lado.

Apresentamos a seguir o enunciado das tarefas, a as respectivas competências e habilidades almejadas na resolução da mesma.

1) Avalie e justifique cada uma das afirmações:

- a) A área do quadrado maior é o quádruplo da área do quadrado menor.
- b) A área do triângulo médio é o dobro da área do triângulo menor.
- c) A área do paralelogramo é congruente à área do quadrado menor.

2) Comparando os sete polígonos que formam o Tangram. Podemos encontrar distintos polígonos com mesma área? Argumente

Na tarefa 1, temos como objetivo analisar se os alunos realizaram corretamente o cálculo das áreas dos polígonos que compõem o Tangram e a razão entre elas.



O objetivo da tarefa 2 é verificar se os alunos percebem quais polígonos distintos dispostos no Tangram apresentam a mesma área.

#### 4. Análise da produção dos registros escritos pelos alunos

Neste relato de experiência apresentamos a análise do desempenho dos alunos da turma 8º “D”, divididos em duplas (D1 a D17) além de um trio nomeado de T. Foi levado em conta, a análise da construção do Tangram e o desempenho da turma nas duas tarefas de modo geral.

Adotamos como modelo de análise das informações aquele proposto por Macedo et al (2015). Os protocolos escritos foram avaliados mediante duas categorias de análise. Primeiro, os registros foram separados em agrupamentos que somente identificavam o número de acertos e erros, o que possibilitou uma análise quantitativa (vide tabelas 1 a 3). Em seguida procedeu-se a uma análise qualitativa, em que os registros foram observados, buscando-se compreender os modos de solução e os tipos de erros produzidos.

#### 5. Resultados e discussão

Na primeira parte que consistiu na construção do Tangram o desempenho foi plenamente satisfatório, pois todas as 17 duplas e 1 trio construíram de maneira adequada o material manipulativo no papel quadriculado.

Em relação ao desempenho da tarefa 1, segue uma tabela de desempenho para cada um dos itens propostos.

**Tabela 1:** Composição de erros e acertos

Item	a)	b)	c)
Acertos	10	8	12
Erros	8	10	6

Fonte: arquivo dos pesquisadores





Verificando as produções dos alunos e as dificuldades encontradas por eles durante a realização dessa tarefa, observamos que eles tiveram muita dificuldade em representar na forma de fração as áreas dos quadrados não inteiros, por isso preferiram a representação decimal para o cálculo.

No primeiro item, a maior parte das duplas conseguiu acertar e calcular as áreas de maneira coerente chegando nos valores corretos incluindo as casas decimais como áreas com 0,5 u.a. (unidades de área), verificando assim que o quadrado maior não era o quádruplo do menor.

Em relação aos erros cometidos, a maioria conseguiu responder que não era o quádruplo, porém, os valores de áreas estavam errados. Em alguns casos, isso se deve a dificuldade em trabalhar com adição de números decimais, pois vários alunos chegaram em valores próximos aos corretos. Os valores obtidos muito distante do esperado, foi devido ao erro dos alunos no processo de contagem da unidade de medida de área, ou seja, contaram quadrados inteiros (1 u.a.) ao invés de considerar que o contorno do polígono em questão envolvia em certos quadrados a relação parte-todo (metade ou um quarto de uma unidade de área).

No segundo item, foi constatado um número maior de erros do que acertos. Os erros aconteceram em decorrência da dificuldade na visualização das áreas não inteiras, mais especificamente nos casos de um quarto da unidade de área.

O último item obteve uma grande porcentagem de acertos. Deve-se ressaltar que nesse item os alunos tiveram dificuldade em compreender o significado do vocábulo “congruência”, por isso, a atividade foi suspensa por alguns minutos em busca do significado dessa palavra por parte da professora com a turma. Segundo os relatos das duplas que acertaram esse item, houve mais facilidade nesse item do que no anterior, pois nesse não apareceram áreas decimais com 0,25 u.a.; apenas com 0,5 u.a, assim como no primeiro item, por isso a visualização foi mais facilitada.

Para as duplas e o trio que erraram, a dificuldade foi a mesma sentida nos outros itens; a adição de números decimais, bem como a contagem errada de áreas inteiras com 1 u.a. no lugar de 0,5 u.a.





De modo geral, a maioria dos erros ocorreu por conta da visualização das áreas decimais e em alguns casos na adição de números decimais. É importante salientar que as duplas e o trio de alunos não tiveram problemas com a interpretação das palavras quádruplo e dobro. Outro dado interessante é que todos os alunos não utilizaram a unidade de medida ‘u.a.’ nas respostas. Na correção coletiva das tarefas com a turma, a professora questionou sobre este fato e o argumento mais comum dos alunos é que eles não sabiam que isso era importante e relevante para a resposta de cada item da tarefa.

Em relação ao desempenho da tarefa 2 (Comparando os sete polígonos que formam o Tangram. Podemos encontrar distintos polígonos com mesma área? Argumente), o percentual de acertos equiparou ao percentual de erros, ou seja, 50%.

Em relação aos alunos que acertaram a resposta, notamos um desempenho coerente, pois da mesma forma que na tarefa anterior, primeiro foi feito o cálculo da área de cada polígono, respeitando o fato de que determinados contornos envolviam a relação parte-todo, dada 1 u.a. Posteriormente, a comparação dos valores de área permitiu concluir que o triângulo médio, paralelogramo e quadrado menor eram os polígonos congruentes.

As duplas e o trio de alunos que erraram a resposta; tiveram a mesma dificuldade que apresentaram na tarefa anterior; o cálculo das áreas decimais e a adição de números decimais. É interessante salientar dois dados importantes, por um lado, algumas duplas apresentaram alguma dificuldade na identificação do polígono, com isso acabavam confundindo o quadrado com o paralelogramo. Por outro lado, todas as duplas que erraram colocaram como resposta que os dois triângulos maiores possuíam a mesma área, apesar da informação estar correta, não representava a resposta da questão.

Na correção da atividade com seus alunos, a professora-pesquisadora abordou o significado da palavra distinto e seu sentido no enunciado, para averiguar se houve problema de produção de significado; situação que de fato não ocorreu.

## 6. Considerações finais





As duas tarefas que compuseram a oficina pedagógica envolvendo o Tangram teve como objetivo proporcionar aos alunos a oportunidade de realizarem a seguinte exploração: é possível identificarmos polígonos distintos com mesma área?

Para obter a resposta correta os alunos foram instigados a calcular a área dos diferentes polígonos que compõem o referido material manipulativo.

Abordamos a construção do Tangram em uma malha quadriculada, pois o uso de malhas geométricas é valorizada em muitas tarefas propostas nos materiais disponíveis aos alunos das escolas públicas do Estado de São Paulo. Em termos pedagógicos, nosso propósito foi instigar o cálculo de áreas a partir da ideia de espaço ocupado, tomando como forma de quantificação um quadrado de uma unidade de área (1 u.a.).

Nesse processo o aluno se deparou com a concepção parte-todo que se caracteriza no caso por um inteiro (grandeza contínua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário. Para a contagem correta das partes e a respectiva quantificação da área correspondente, levou em conta a divisão do quadrado em triângulos com mesma área.

Os alunos optaram por não utilizar uma fração associada às partes selecionadas da figura, no caso, um quarto ou metade de um quadrado com uma unidade de área (1 u.a.). A opção dos alunos, em termos de registro escrito, foi pela forma decimal, a qual comprometeu as respostas de diversas duplas e do trio de alunos da turma 8º D.

O erro mais corriqueiro foi não associar que um quadrado subdividido em quatro partes congruentes corresponde a 0,25 que equivale a um quarto da referida área. Apenas a dupla D8 conseguiu identificar os polígonos distintos com mesma área utilizando o conceito de equivalência de áreas, a partir da subdivisão dos polígonos contidos no Tangram.

## 7. Referências bibliográficas

GUIMARÃES, Viviane Guerra. **Ensinando a geometria euclidiana no ensino fundamental por meio de recursos manipuláveis**. 2015, 82f. Dissertação (Mestrado em matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.





MACEDO, Lino de et al. Intervenção com jogos: estudo sobre o Tangram. **Revista Quadrimestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional**, São Paulo, v.19, n.1, p. 13-22, 2015.

MIRANDA, Ricardo. **Estudo das formas geométricas através da utilização do TANGRAM**. 2015, 49f. Dissertação (Mestrado em matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

OLIVEIRA, Ludmila Tamega Ferreira de. **Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas utilizando o Tangram e o Tegram**. 1998, 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

PAVIANI, Neires Maria Soldatelli; FONTANA, Niura Maria. Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência. **Conjectura**, Caxias do Sul, v.14, n.2, p.77 -88, 2009.

SANTANA, Walenska Maysa Gomes de. **O uso de recursos didáticos no ensino de conceito de área**: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006, 189f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SILVA, Welington Ribeiro da. **O ensino de matemática na escola pública**: uma (inter)invenção pedagógica no 7º ano com o conceito de fração. 2011, 260f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2011.

