A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM VIA TAREFAS EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS

Fábio Luiz Dias Tozo

UFSCar – Universidade Federal de São Carlos
fabiotozo@gmail.com

Profº Dr. Paulo César de Oliveira
UFSCar – Universidade Federal de São Carlos
pauloolliver@ig.com.br

Resumo:
Este artigo é um extrato da dissertação de mestrado defendida pelo primeiro autor. A pesquisa realizada buscou respostas para a seguinte questão de investigação: como alunos da primeira série do Ensino Médio mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas envolvendo o conceito de função afim? Para isto, foi aplicado tarefas de natureza exploratória-investigativa, como alternativa pedagógica na aprendizagem do conceito de função afim. A pesquisa de natureza qualitativa teve como objetivo investigar a potencialidade da transição de registros semióticos, junto a uma turma, com vinte e seis alunos, agrupados em pares, no decorrer do desenvolvimento das atividades matemáticas. A produção de informações, oriunda dos protocolos escritos pelos alunos sobre a solução das tarefas, foi submetida à análise. Um de seus resultados mostrou a ruptura na conversão usual do registro algébrico para o registro tabular e, finalmente, para o registro gráfico.
Palavras-chave: Função Afim; Registros de Representação Semiótica; Tarefas exploratórias-investigativas, Ensino Médio.

1. Introdução

A Matemática no Ensino Médio, por um lado, visa o valor formativo do indivíduo devido ao desenvolvimento de competências e habilidades; o qual contribui na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo. Por outro lado, desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Contudo, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental,

> mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2000, p.40-41).

Tomando por base este último caráter, precisamos levar em conta que os objetos matemáticos não são espontaneamente inteligíveis à percepção ou em uma situação intuitiva imediata, assim como os objetos chamados habitualmente de físicos ou reais. Desse modo, eles se constroem categoricamente em seus vários registros de representação semiótica. Para Duval (2003, p. 39),

> As representações semióticas são as produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem seus próprios limites de significância e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que se inserem em diferentes sistemas semióticos.

O contínuo interesse pelos problemas do ensino-aprendizagem do conceito de função provém da nossa prática docente, ao longo de 10 anos no Ensino Médio em escolas da rede particular de ensino de Sorocaba. Entendemos que as grandes dificuldades apresentadas por alunos em relação ao conteúdo função afim, nesse nível de escolaridade, estão relacionadas com a necessidade de desenvolver a pluralidade de registros de representação semiótica e suas possíveis transformações, as quais não têm sido tratadas adequadamente no âmbito escolar.

Isto pôde ser constatado pelas nossas observações quanto às dificuldades dos alunos ao fazer generalizações de fórmulas, realizar representações em tabelas e até mesmo representar pares ordenados no plano cartesiano. A conexão ou o estabelecimento de relações para obtenção de informações entre as diferentes formas de representar não é algo tão evidente; na maioria das vezes, são compreendidas de forma isolada.

Em nossa dissertação de Mestrado abordamos o objeto matemático função afim; por um lado, tratado por meio de aplicação de tarefas exploratório-investigativas, segundo a perspectiva de Ponte (2005). Por outro lado, o conteúdo das tarefas propostas para alunos da primeira série do Ensino Médio privilegiou a possibilidade de mobilizar diversos registros de representação semiótica, no decorrer da atividade matemática dos nossos alunos.

O processo de formulação do problema de pesquisa bem como o planejamento das tarefas utilizadas no trabalho de campo desta pesquisa teve contribuições do GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática). Dos estudos realizados neste grupo de pesquisa, apropriamos da estratégia de ensino-aprendizagem exploratória, cuja "característica principal é que o professor não procura explicar tudo; deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (PONTE, 2005, p.13).

O planejamento coletivo dos enunciados das tarefas no âmbito do GEPLAM privilegiou articular, em um mesmo instrumento de pesquisa, a valorização de oportunidades de reflexão escrita por parte dos alunos (PONTE, 2005), combinada com a possibilidade de mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2003).

A análise da produção de informações oriundas do trabalho de campo desenvolvido em sala de aula buscou responder a seguinte questão de investigação: *como alunos da primeira série do Ensino Médio mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica na solução de tarefas exploratórias-investigativas envolvendo o conceito de função afim?*

2. A articulação entre registros de representação semiótica e tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem do conceito de função afim

A matemática é apresentada de várias maneiras de representações para um mesmo objeto, no nosso caso, pela escrita na língua natural, linguagem algébrica, gráfico, tabulares. As representações de natureza semiótica permitem o acesso ao objeto matemático que, na sua essência é abstrato. Este fato é um marco da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A natureza semiótica deve-se ao fato de que a aprendizagem frente aos objetos matemáticos ocorre na forma conceitual. Neste sentido, Duval (2003, 2009) estudou o funcionamento cognitivo do aluno na realização de tarefas matemáticas e seus possíveis problemas de aprendizagem.

Em sua teoria, Duval (2009) explicou que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático, denomina-se, registro semiótico. Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado.

No acesso ao objeto matemático deve ser enfatizado duas transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

Tomando por base nosso objeto de estudo, se conservarmos o mesmo sistema semiótico, há uma transformação de registro na forma de tratamento. Podemos tomar como exemplo o cálculo de diferentes pares ordenados associados a uma mesma lei de formação para uma função.

Já conversões são as transformações mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos. É importante salientar que converter implica em coordenar registros mobilizados. Uma conversão não conserva a explicação das mesmas propriedades do objeto. Assim, a representação do objeto no registro de chegada, por meio de uma conversão, não terá o mesmo significado que a representação no registro de partida.

É comum observamos na condição de professor que o aluno expressa um melhor rendimento escolar quando constrói um gráfico de uma função a partir de sua lei de formação, em relação ao processo inverso (conversão do registro gráfico para o registro algébrico).

> (...) a conversão entre gráficos e expressões algébricas de funções supõe levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro lado, os valores dos coeficientes (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1) (DUVAL, 2003, p.17).

De acordo com Lima (1996, p.87) “uma função f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, b $\in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a.x + b$ para todo x $\in \mathbb{R}$”. As translações f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ formuladas por $f(x) = x+b$, inclusive a função identidade $f(x) = x$; também são funções afins. Ainda o mesmo autor destacou que as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$ são casos particulares da função afim.

Em síntese, concebemos que para aprender o conceito de função afim, por um lado, precisamos desenvolver uma progressiva coordenação entre vários sistemas semióticos de representação. Por outro lado, podemos potencializar esta aprendizagem se, nós professores, formos capazes de produzir enunciados (tarefas) estimuladores da atividade matemática dos alunos. Pautamos em Ponte (2005, p.11-12) que nos instruiu que “formulando tarefas adequadas o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas; é preciso ter atenção ao modo de propor e de conduzir a sua realização na sala de aula".

A tarefa, segundo Ponte (2005), pode surgir de diversas maneiras, entre elas, pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno. Em nossa pesquisa a tarefa foi concebida desta forma e o primeiro autor deste artigo assumiu a função de pesquisador em uma turma de 1ª série do Ensino Médio.

Ponte (2005) expôs que há vários tipos de tarefa matemática como problemas, exercícios, exploração e investigação. Há tarefas que são mais desafiantes outras mais acessíveis, umas mais abertas outras mais fechadas. Ponte (2005, p.17-18) expôs que "uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas".

Em nossa pesquisa tratamos o que Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) designaram de tarefas exploratório-investigativas cujo objetivo é instigar os alunos a pensar de maneira genérica, percebendo regularidades e explicitando-as através de expressões matemáticas. Esta pode ser uma alternativa poderosa para o desenvolvimento interrelacionado do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos, caracterizando este tipo de atividade como mais uma concepção de educação algébrica.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) conceberam que este tipo de tarefa tende ser mais livre e menos sistemática que as demais, usadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático, permitindo, aos alunos, várias alternativas de exploração e investigação. O ambiente exploratório-investigativo pode proporcionar aos alunos um envolvimento legítimo, pautado em seu interesse pela atividade social e mental resultante de tarefas abertas que permite os alunos criar suas próprias relações com o saber matemático a ser construído e/ou (re)significado.

3. Metodologia

No processo contínuo de avaliação da aprendizagem dos alunos de três turmas de 1ª série do Ensino Médio, no decorrer do primeiro bimestre letivo de 2015, constatamos que a apreensão do conceito de função afim ficou comprometida para diversos estudantes, diante da necessidade de conversão e coordenação de diferentes registros de representação semiótica.

Pontualmente, as dúvidas e os maiores erros dos nossos alunos estavam em questões de análise e interpretação de gráficos.

Em nossa instituição escolar trabalhamos com material apostilado do Sistema de Ensino COC, e no que diz respeito à aprendizagem do conceito de função de afim, o aluno deve ser capaz de identificar e entender a interdependência entre grandezas e representa-las em um sistema de coordenadas cartesianas; aprender o significado de função, conceituar, analisar, representar e identificar uma função afim e; produzir, ler, analisar e interpretar gráficos que representam funções afins em um plano cartesiano.

A aquisição de saberes matemáticos envolve a compreensão sobre o modo como os alunos estabelecem relações entre conceitos. Para nós, um dos objetivos do ensino da matemática é levar o aluno a construir suas próprias relações com o saber que lhe é ensinado, porém, também é necessário que o professor tenha consciência da significação que ele mesmo dá ao saber que ensina.

O propósito de desenvolvermos nosso trabalho de campo da pesquisa via aplicação das tarefas exploratórias-investigativas foi submetido à apreciação da coordenação do Ensino Médio da unidade escolar. Nosso intuito era ajudar esses alunos com lacunas no entendimento e compreensão de um tema importante para a formação do aluno, pois função afim é utilizada em outras disciplinas, como na Física, Biologia, Química. Houve também a preocupação quanto ao desempenho dos alunos na prova ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), pois em nosso colégio, a formação neste segmento escolar visa o sucesso nos vestibulares das universidades públicas de nosso país.

Após o ensino-aprendizagem do conteúdo função afim, conforme o calendário da programação dos conteúdos de nossas apostilas; oferecemos nossas tarefas para 34 alunos das turmas de primeira série do Ensino Médio. Como esta proposta de trabalho ocorreu em horário extra do estudo regular destes alunos, bem como não houve atribuição de nota na avaliação da aprendizagem; contamos com a participação efetiva de vinte e seis alunos. No decorrer da aplicação das tarefas foram formadas duplas, cuja identificação de cada aluno deu-se pelas letras do alfabeto (A, B, C,..).

A seguir apresentamos o enunciado de uma das tarefas, a resposta esperada (análise a priori) e a análise qualitativa (a posteriori) do desempenho destes alunos, tomando por base a coordenação e mobilização de registros de representação semiótica.

4. Analise a priori da tarefa

Uma montadora de automóveis testou o desempenho de seu novo carro modelo flex (bi combustível). Na avaliação do consumo, as médias foram de 9 e 12 km/l na estrada, com etanol e gasolina, respectivamente.

a) João após comprar tal carro, fará três percursos, com distâncias de 36 km, 72 km e 108 km cada. Para estes casos, quantos litros de gasolina e etanol serão gastos, em média?

A resposta esperada envolve a conversão do registro da língua natural para o registro numérico. É opcional a utilização de um registro de representação semiótica auxiliar, no caso, o tabular, como forma de organizar comparativamente os resultados obtidos:

Km	Etanol (litros)	Gasolina (litros)
36	4	3
72	8	6
108	12	9

b) Sabendo que em determinado posto o preço do etanol é R$2,09 e o da gasolina R$3,17, qual é o valor gasto com combustível para cada situação descrita no item anterior?

Assim como no item anterior, a articulação entre os registros de representação semiótica é a mesma:

Km	Etanol (valor gasto)	Gasolina (valor gasto)
36	R$8,36	R$9,51
72	R$16,72	R$19,02
108	R$25,08	R$28,53

c) Levando em conta os cálculos já realizados nos itens **a** e **b**, é possível elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida?

A resposta esperada envolve a atribuição da variável ‘x’ na conversão do registro numérico para o registro na forma algébrica. É desejável que o aluno neste processo de conversão de registro utilize de procedimentos como, por exemplo, o cálculo mental, para certificar que a fórmula é uma generalização dos casos particulares em questão. Procedimentos como este, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica, ratificam o fato de que a mobilização e coordenação dos registros é condição necessária e suficiente para a aprendizagem matemática.

Etanol	$f(x)=\frac{x}{9}$
Gasolina	$f(x)=\frac{x}{12}$

d) Para cada fórmula do item **c**, faça um esboço gráfico.

A construção de cada gráfico ocorreu em duas situações distintas: em um primeiro momento envolveu apenas o esboço e, em um segundo momento, o professor-pesquisador, disponibilizou o uso do papel milimetrado para avaliar a atividade dos alunos com o conceito de escala. Em termos de registros de representação semiótica, era esperada a conversão do registro algébrico (fórmula) para o registro gráfico, podendo ocorrer a utilização de um registro auxiliar na forma tabular (disposição de pares ordenados) no processo de transição entre diferentes registros. Ressalta-se a importância do aluno observar o par ordenado (0,0) como ponto inicial da configuração de cada gráfico em questão.

e) Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?

A compreensão matemática está relacionada com a diversificação de registros de representação. Essa diversidade permite uma compreensão global do objeto matemático e rompe com a dificuldade da aprendizagem em um único registro de representação, possibilitando aos alunos fazer associações conceituais e não confundir o objeto matemático com sua representação.

Nessa tarefa, esperava-se que as duplas de alunos conseguissem relacionar a fórmula algébrica de cada combustível, com seus respectivos gráficos, destacando as variáveis visuais

ISSN 2178-034X

como o sentido de inclinação e as respectivas unidades simbólicas correspondentes; no caso, o sinal do coeficiente angular.

5. Analise a posteriori da tarefa 1

Para apresentarmos a análise sobre a produção da atividade matemática dos alunos, sistematizamos o desempenho deles em cada um dos itens da tarefa:

Tabela 1: Descrição do desempenho dos alunos.

Item	Números de acertos	Dificuldade encontrada
A	13	Nenhuma
B	13	Nenhuma
C	9	Escrever a lei da função
D	9	Converter para a forma gráfica
E	9	Interpretação gráfica

Nos itens ‘a’ e ‘b’, houve a mudança de registro de representação semiótica, da língua natural para a numérica, garantindo um entendimento e rendimento esperado dos alunos.

No item ‘c’, cujo objetivo era elaborar uma fórmula matemática sabendo que o gasto com combustível depende da distância (**x**) percorrida, nove duplas concluíram corretamente.

Apresentamos a seguir o protocolo da solução apresentada pela dupla MN:

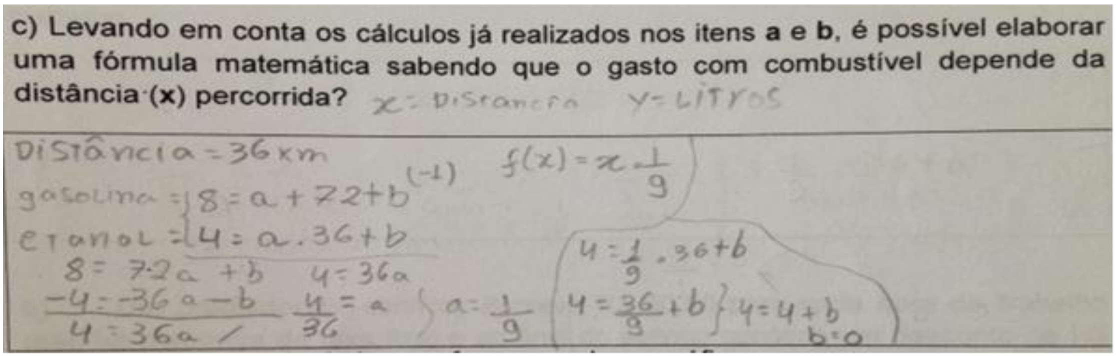

Figura 1: Protocolo da dupla GH (tarefa 1).

A dupla GH realizou todo o tratamento algébrico para determinar a lei da função, partindo de um mesmo sistema semiótico, ou seja, um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. No caso do combustível gasolina, a dupla escreveu corretamente a relação funcional exigida. No que diz respeito ao etanol, não houve a realização de nenhum cálculo que conduzisse à lei da função correspondente. A ausência desta última lei de função não interferiu na resolução dos itens ‘d’ e ‘e’, os quais estão corretos. O bom desempenho nos dois últimos itens deu-se pelo resgaste das respostas corretas nos itens ‘a’ e ‘b’. É interessante destacar que esta dupla obteve um bom desempenho nas respostas dos cinco itens dessa tarefa devido à utilização da diversidade de registros de representação semiótica disponíveis em sua atividade matemática. Estes alunos não se prenderam ao conteúdo de uma resposta dada para obter a solução do item posterior na tarefa.

O item ‘d’ (Para cada fórmula do item c, faça um esboço gráfico) envolveu a construção de gráficos, os quais poderiam ser obtidos a partir das expressões algébricas das funções afins determinadas no item ‘c’. A orientação que os alunos receberam de acordo com as tarefas propostas na apostila do sistema COC consistiu em partir da forma algébrica para determinar, pelo menos, dois pontos pertencentes à função. Posteriormente, registrar os pares ordenados em uma tabela de modo a facilitar a construção do gráfico.

Das 13 duplas, 3 duplas fizeram o esboço dos dois gráficos, o restante deixaram em branco ou construíram apenas uma tabela. Apenas uma dupla seguiu a orientação que acabamos de descrever; as outras duas duplas utilizaram as respostas obtidas no item ‘a’ ou ‘b’ para o esboço gráfico.

Em outro momento, quando disponibilizamos o papel milimetrado para a construção dos gráficos, o desempenho foi o seguinte: cinco duplas acertaram corretamente a construção dos dois gráficos. Quatro duplas acertaram pelo menos um gráfico passando pela origem do sistema. Três duplas não conseguiram converter o registro tabular para o registro gráfico ou cometeram erros nos cálculos dos pares ordenados. Uma dupla não fez a construção, deixando em branco.

As nove duplas que tiveram um bom desempenho na construção do gráfico, nenhuma delas seguiu o roteiro de orientação dado na resolução das tarefas da apostila, ou seja, não partiram do registro algébrico para o gráfico. A construção dos gráficos envolveu a mobilização e coordenação do registro numérico (resposta do item ‘a’) para o registro gráfico.

No que diz respeito ao item ‘e’ (Tendo em mãos a fórmula matemática e o respectivo gráfico, na comparação deles, quais as relações que você pode estabelecer?), três duplas não apresentarão nenhuma argumentação e uma dupla escreveu que os valores relativos às

ISSN 2178-034X

distâncias estão dispostos no eixo ‘x’ e os respectivos consumos estão descritos no eixo ‘y’. As demais duplas apresentaram argumentações, as quais reunimos na tabela a seguir:

Tabela 2: Registros dos alunos (item ‘e’)

Duplas	Registro escrito das duplas
EF	A quantidade de gasolina gasta represente 1/12 da distância. A quantidade de etanol gasta represente 1/9 da distância.
GH	Os litros dependem da distância percorrida. O etanol é mais econômico, mas a gasolina faz uma maior quilometragem.
IJ, KL	Eles são dependentes: se eu aumento a distância, os litros aumentarão consequentemente.
PQ	Apesar de menor consumo por trecho percorrido, a opção do etanol é mais econômica.
RS	Que a cada percurso, os litros de etanol varia de 4 em 4, enquanto a gasolina varia de 3 em 3.
VX, ZW, AB	O gráfico é crescente (a>0)

Tomando por base as competências e habilidades que descrevemos quanto à aprendizagem do conceito de função de afim, as duplas GH, IJ, KL e PQ identificaram a interdependência entre grandezas. As duplas EF e RS compararam os gráficos, construídos separadamente, destacando quantitativamente a variabilidade dos valores associados aos eixos do plano cartesiano.

Já as duplas VX, ZW e AB interpretaram os gráficos destacando o que Duval (2003, 2009) designa de variáveis visuais; no caso, o sentido crescente do gráfico. Estes alunos também associaram a unidade simbólica correspondente ao sentido da inclinação da reta, ou seja, a>0.

6. Considerações finais

O planejamento e aplicação de tarefas exploratórias-investigativas nesta pesquisa cumpriu o papel de problematizar e produzir significados ao conceito de função afim. Por se tratar de tarefas abertas, os alunos criaram em diversos momentos suas próprias relações na forma de mobilizar e coordenar os seguintes registros de representação semiótica: língua natural, algébrico, tabular e gráfico.

Esta autonomia na produção de significados rompeu com as orientações didático-pedagógicas dadas aos alunos, segundo a linearidade de conversão de registros semióticos, ou seja, do algébrico para o registro tabular e, finalmente, para o registro gráfico.

Os diversos itens da tarefa que apresentamos neste artigo instigaram a produção de múltiplos de registros e, neste sentido, nossos alunos em diversos momentos, optaram por construir gráficos ponto a ponto, deixando de lado, a conversão do registro algébrico para o gráfico. É exatamente esta conversão a geradora das dificuldades mais comuns no estudo de função, conforme mostramos no desempenho dos nossos alunos no item ‘d’ da tarefa descrita. Enquanto, três duplas fizeram o esboço dos dois gráficos solicitados, cinco duplas construíram corretamente os mesmos gráficos quando disponibilizado o papel milimetrado.

Não houve a discussão do coeficiente angular na comparação dos gráficos, pelo fato dos mesmos terem sido construídos separadamente e, com escalas distintas.

7. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais:* Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.109p.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Silvia D.A. (Org.) ***Aprendizagem em matemática****:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais* (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. Um estudo das potencialidades das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO: Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005, Lisboa. *Anais*... Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM), 2005. CD-ROM. 22p.

LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. São Paulo: SBM, 1996 (Coleção do Professor de Matemática, v.1).

PONTE, João Pedro. Gestão curricular em Matemática. In: Grupo de Trabalho da Investigação - GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.