CUSTÓDIO, Leandro Aparecido Alves; OLIVEIRA, Paulo Cesar. Análise e reflexões sobre as tarefas contidas no material didático da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo para o Ensino Médio. *In*: Encontro de Pesquisa Educacional em Pernambuco - epePE, 8., 2021, Recife. **Anais [...].** Recife: Fundação Joaquim Nabuco, 2022. v.1, n.1, p. 4414-4437. ISSN 2176-8153

Análise e reflexões sobre as tarefas contidas no material didático da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo para o Ensino Médio

Leandro Aparecido Alves Custódio

Paulo Cesar Oliveira

Resumo: O objetivo desta pesquisa foi analisar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas (Situações de Aprendizagem) contidas no segundo volume do Caderno do Professor para a segunda série do ensino médio e, suas possíveis contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico. O estudo fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e no Letramento Probabilístico de Iddo Gal. Buscou-se responder as seguintes questões de investigação: Quais e como são articulados os registros de representação semiótica nas situações de aprendizagem propostas no Caderno do professor? Tais registros contribuem para o desenvolvimento do letramento probabilístico? Para o cumprimento dos propósitos do nosso trabalho, recorremos à pesquisa bibliográfica e documental e com base em nossos aportes teóricos, analisamos o conteúdo de quatro situações de aprendizagem. Entre os diversos registros de representação semiótica, o diagrama de árvore foi pouco explorado nas tarefas propostas. As tarefas relativas à análise combinatória, não apresentaram contribuições ao desenvolvimento do letramento probabilístico, devido a ausência de conexões internas entre o processo de contagem e o cálculo das probabilidades.

Palavras-chave: Ensino Médio. Probabilidade. Letramento. Semiótica. Combinatória.

Introdução

A elaboração e implantação do documento relativo à Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) propiciou a ampliação dos blocos temáticos já contemplados na Proposta Curricular anterior (números, geometria, medidas), introduzindo um quarto bloco, denominado ‘Tratamento da Informação’; o qual completou a atualização curricular nesse documento e abriu espaço para a incorporação crítica das tecnologias no ensino.

> É importante salientar que o campo do tratamento da informação estende-se para além das fronteiras da organização e análise de dados, como geralmente

> é abordado no Ensino Fundamental. Numa perspectiva curricular que se estenda ao Ensino Médio, podem compor esse eixo o estudo das matrizes, amplamente usado na programação de computadores, o planejamento de uma pesquisa estatística que utilize técnicas de elaboração de questionários e amostragem, a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência estatística, o estudo de estratégias de contagem e do cálculo de probabilidade etc. (SÃO PAULO, 2008, p.47)

O atual Currículo do Estado de São Paulo publicado inicialmente em 2010 e revisado em 2012, contém um texto muito semelhante à Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008); exceto pelo reagrupamento de conteúdos devido à retirada do bloco temático denominado Tratamento da Informação. Argumenta-se neste Currículo (SÃO PAULO, 2012) que tem sido frequente rotular conteúdos de estatística descritiva como Tratamento da Informação. De acordo com Cobello e Oliveira (2015, p.9), é pertinente questionar "qual o rótulo que deve ser dado aos conteúdos de estatística inferencial?"

No atual documento curricular do Estado de São Paulo ratifica-se o reconhecimento pelo destaque dado aos conteúdos de estatística descritiva, porém, considera-se "necessário evidenciar aqui o fato de que todos os conteúdos estudados na escola básica, em todas as disciplinas, podem ser classificados como 'Tratamento da Informação'" (SÃO PAULO, 2012, p.36). Neste sentido, não há um porquê de agrupar um determinado conjunto de conteúdos da disciplina de Matemática em um bloco temático com a referida denominação, já que *a* "transformação da informação em conhecimento, é a meta comum de todas as disciplinas escolares e, em cada disciplina, de todos os conteúdos a serem ensinados" (SÃO PAULO, 2012, p.36).

Cobello e Oliveira (2015) argumentaram que o fato de justificar que os conteúdos estudados na escola básica, em todas as disciplinas, podem ser classificados como tratamento da informação, descaracteriza o papel de sua existência contemplado na Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008); pelo fato de que no contexto escolar há conteúdos cuja aprendizagem se desenvolve numa perspectiva determinística e outros, cuja natureza é aleatória. Neste sentido, será que a formação do aluno como cidadão não pode ficar comprometida, ocorrendo apenas pela visão determinista de mundo?

Em função do reconhecimento das possibilidades formativas e transformadoras presentes no trato desses conhecimentos, a literatura acadêmica nomeou a Educação Estatística para além de um ensino em estatística e probabilidade.

Lopes (2010) em seu ensaio teórico, subsidiado pelas pesquisas realizadas, pelas práticas apresentadas na literatura e por nossas experiências na formação inicial e contínua de professores, uma Educação Estatística para ser praticada nas aulas de matemática, é desejável que as tarefas de sala de aula envolvam a proposta de problemas estatísticos, a realização de projetos de investigação estatística, a realização de experimentos e de confronto com simulações para exercitar a tomada de decisão. Ao desenvolver um projeto de investigação estatística a pessoa mobiliza conhecimentos sobre combinatória, probabilidade e estatística, pois, define o tema, elabora a questão de investigação, determina a metodologia para coleta de dados, explora os dados e realiza a interpretação dos resultados.

Ainda, segundo Lopes (2010), a Educação estatística não apenas auxilia na leitura e interpretação de dados, mas fornece uma habilidade para que uma pessoa possa analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade.

Canaveze (2013) alertou que o olhar sobre as diferentes visões de mundo é importante, pois o contexto escolar do desenvolvimento da maior parte dos conteúdos da Educação Básica (aritmética, álgebra e geometria) proporciona ao aluno uma educação formal determinista. No entanto, a escala do menos ao muito provável é algo associado à linguagem do cotidiano, atrelada a uma visão aleatória de mundo; a qual deve ser contemplada na educação formal de nossos alunos.

Nessa investigação o foco foram as tarefas contidas no Caderno do Prrofessor. Analisamos o quão a diversidade de registros de representação semiótica contribuiu no desenvolvimento do letramento probabilístico.

Os registros de representação semiótica

A semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno suscetível de produção de significado e sentido (SANTAELLA, 1983).

No caso da matemática, a linguagem extrapola o uso da língua materna, principalmente via registros escritos, pois nos comunicamos também por meio de gráficos, tabelas, simbologias algébricas, entre outras formas de registros de representação semiótica.

Duval (2009) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação. Em termos de registros de representação semiótica, temos o signo que é relacionado com um objeto concreto, para especificidade matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). Em relação ao objeto e sua representação: “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação¨ (DUVAL, 2009, p. 14).

Se considerarmos o conceito de probabilidade na condição de objeto, podemos representá-lo sob diversos enfoques: clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Por exemplo, no enfoque clássico, a probabilidade é definida como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam admitidos como igualmente prováveis de ocorrer (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996). No contexto frequentista, na qual a probabilidade é definida a partir do cálculo das frequências relativas de ocorrências de sucessos provenientes de repetidos experimentos, nas mesmas condições. A principal característica deste enfoque é que o valor matemático da probabilidade emerge do processo de experimentação (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996).

Cada forma de apresentar um registro de representação semiótica possui um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido, nos exemplos dados, o sistema está vinculado ao enfoque ilustrado. A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar distintas transformações nos registros (tratamento e conversão), bem como coordená-los adequadamente.

Para Duval (2009), os registros de representação são formas de representar um objeto matemático, e ainda o sistema que podemos representar um objeto matemático, o autor denomina: registro semiótico. O acesso ao objeto matemático, segundo ao autor, deve ser enfatizado por meio de duas transformações de representação semiótica, e essas são profundamente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação. As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p.16).

No caso do nosso objeto de estudo, a probabilidade, Canaveze (2013) e Oliveira (2014) utilizaram os seguintes registros para efetuar e coordenar as conversões: registro da língua natural materna (conteúdos dos enunciados ou abordagem de termos probabilísticos), registro figural (tabela de dupla entrada ou de contingência, além do diagrama de árvore) e registro simbólico na forma algébrica (uso de fórmulas) ou numérico (razão para quantificar a probabilidade).

O letramento probabilístico

Historicamente, Soares (2004) situa-nos que, em meados dos anos de 1980, se dá, simultaneamente, a invenção do letramento no Brasil, da literacia em Portugal, entre outros, para nomear fenômenos distintos daquele denominado alfabetização.

No Brasil a discussão do letramento surge sempre enraizada no conceito de alfabetização, no entanto, é importante o reconhecimento de que a alfabetização e o letramento têm diferentes dimensões, o que em termos de aprendizagem inicial da língua escrita, exige múltiplas metodologias.

Em termos de processo de ensino, Soares (2004, p.15) associa o letramento como "imersão das crianças na cultura escrita, participação em experiências variadas com a leitura e a escrita, conhecimento e interação com diferentes tipos e gêneros de material escrito". Já a alfabetização envolve a

> consciência fonológica e fonêmica, identificação das relações fonema–grafema, habilidades de codificação e decodificação da língua escrita, conhecimento e reconhecimento dos processos de tradução da forma sonora da fala para a forma gráfica da escrita (SOARES (2004, p.15)).

Na nossa pesquisa não temos a pretensão de apresentar uma discussão sobre as múltiplas facetas envolvendo os termos letramento e alfabetização como foi muito bem tratado por Soares (2004). Nosso objetivo foi avaliar o conceito de probabilidade por meio da diversidade de registros de representação semiótica dispostos no enunciado das tarefas (situações de aprendizagem) contidas no Caderno do Professor e, suas possíveis contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico.

Com relação ao letramento probabilístico, Gal (2005, 2012) afirmou que os estudantes devem se familiarizar com as diferentes formas de cálculo da probabilidade de um evento, para que, desta maneira, possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar.

Nestas condições, para avaliar se um aluno atingiu o letramento probabilístico, Gal (2005) propôs um modelo composto por elementos cognitivos e de disposição (atitudes do estudante em relação ao conhecimento: criticidade, crenças e atitudes e sentimentos pessoais). Em nossa pesquisa valorizamos apenas a análise dos elementos cognitivos, destacados no quadro 1:

Quadro 1. Elementos Cognitivos do modelo de Iddo Gal

Grandes Ideias: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza.

Cálculos Probabilísticos: formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.
Linguagem: Os termos e os métodos utilizados para comunicar resultados probabilísticos.
Contexto: compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.
Questões críticas: reflexões sobre assuntos no contexto de Probabilidade.

Fonte: Gal (2005, p.51, tradução nossa)

Análise do Currículo do Estado de São Paulo (CESP)

Em termos educacionais, o CESP tem como objetivo nortear a ação do docente no que tange o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes. Considera-se que junto com a língua materna, a disciplina Matemática partilha fraternalmente a função do desenvolvimento do raciocínio lógico, a capacidade de expressão, compreensão, argumentação, abstração, entre outras.

Diferente dos documentos curriculares em âmbito nacional (BRASIL, 2002, 2006), os conteúdos de estatística, combinatória e probabilidade no CESP não são agrupados em um bloco temático específico, mas são distribuídos nos blocos temáticos Números, Geometria, Relações (SÃO PAULO, 2012).

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) contém um quadro de conteúdos e habilidades por ano ou série, de acordo com o segmento escolar, levando em conta quatro bimestres. No Ensino Fundamental (Ciclo II), os conteúdos de estatística (leitura e construção de gráficos e tabelas, medidas de tendência central e construção de gráficos de setores) não são distribuídos de modo a promover o raciocínio estatístico, bem como o estabelecimento de conexões com os conteúdos de probabilidade e combinatória.

No Ensino Médio, o tema probabilidade volta a ser trabalhado somente no 3º bimestre da 2ª série, com o conteúdo ‘análise combinatória e probabilidade’, a partir dos tópicos “princípios multiplicativo e aditivo; probabilidade simples; arranjos, combinações e permutações; probabilidade da união e/ou intersecção de eventos; probabilidade condicional e distribuição binomial de probabilidades”. Apenas neste período letivo, o CESP estabeleceu conexão entre o raciocínio combinatório e probabilístico, ao almejar como habilidade o cálculo de "probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas” (SÃO PAULO, 2012, p.68).

No texto do Currículo do Estado de São Paulo não há explicação sobre o que significa resolver problemas, em especial, que envolvam ideias simples de probabilidade. Apenas explicita que “problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema. E, uma vez formuladas as perguntas, para respondê-las, é necessário discernir o que é relevante e o que não é relevante no caminho para a resposta” (SÃO PAULO, 2012, p.46-47).

O percurso metodológico da pesquisa

Delimitamos nosso objeto de pesquisa como sendo as tarefas contidas no segundo volume do Caderno do Professor para a segunda série do Ensino Médio. Nosso interesse é analisar se essa conexão entre a análise combinatória e probabilidade leva em conta a multiplicidade de registros de representação semiótica, quando pensamos nas diferentes formas de cálculo das probabilidades. A mobilização e coordenação de tais registros contribuem para o desenvolvimento do letramento probabilístico, para que, desta maneira, os alunos possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar?

Analisar o referido volume do Caderno do Professor conduziu-nos ao desenvolvimento de uma qualitativa na modalidade de pesquisa documental que, de acordo com Gil (2012), se assemelha muito à pesquisa bibliográfica. A diferença entre as duas modalidades está justamente na natureza das fontes.

> Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa (GIL, 2012, p.51).

A seguir apresentamos o Caderno do Professor, mais especificamente, o segundo volume utilizado na 2ª série do Ensino Médio.

O Caderno do Professor e as situações de aprendizagem sobre Probabilidade

Em 2012 ocorreu a primeira edição atualizada do Currículo do Estado de São Paulo e como consequência, houve alteração na formatação dos Cadernos do Professor e do aluno, passando a ser dois volumes para cada ano do Ensino Fundamental II, bem como para as séries correspondentes ao Ensino Médio.

O Caderno do Professor é considerado um material complementar ao Currículo Oficial de nosso Estado e seu objetivo é apresentar orientações didático-pedagógicas por meio de oito Situações de Aprendizagem em cada um dos seus volumes.

As quatro primeiras Situações de Aprendizagem (S1, S2, S3 e S4) relativas à segunda série do Ensino Médio, diz respeito ao estudo da probabilidade e análise combinatória, conforme apresentamos no quadro 2:

Quadro 2: Conteúdo das situações de aprendizagem (S1 a S4)

	Título	**Objetivo**
S1	Probabilidade e proporcionalidade: no inicio era o jogo	Explorar a noção teórica de Probabilidade por intermédio de jogos pedagógicos
S2	Análise combinatória: raciocínios aditivo e multiplicativo	Resolução de situações-problema que envolvam simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades
S3	Probabilidades e raciocínio combinatório	Problemas que envolvam o cálculo de probabilidades sob dois aspectos: a independência de dois ou mais eventos para os quais se quer calcular a Probabilidade e as diferentes possibilidades de ordenação para ocorrência simultânea.
S4	Probabilidades e raciocínio combinatório: o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal	Cálculo de Probabilidade e o raciocínio combinatório envolvendo o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.

Fonte: adaptado de Oliveira (2010, p.64)

A seguir descrevemos como foi composto as tarefas de cada Situação de Aprendizagem. Concomitantemente, apresentamos a avaliação do conteúdo de cada uma das tarefas com base nas categorias de análise pautada nos diferentes registros de representação semiótica, bem como nos elementos cognitivos que constituem o letramento probabilístico.

Análise da Situação de Aprendizagem (S1)

Essa Situação de Aprendizagem é composta por 11 tarefas, sendo que a formulação do enunciado das duas primeiras tarefas levou em conta o fato histórico que impulsionou o desenvolvimento do estudo das probabilidades. Mais especificamente, foi resgatado que

> a origem organizada do estudo da probabilidade remonta à correspondência trocada entre os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que viveram no século XVII, na qual discutiam as chances associadas aos jogos de azar, notadamente aos jogos envolvendo baralhos (SÃO PAULO, 2014-2017, p.13).

A explicação sobre a forma como se discutiam tais jogos gerou duas tarefas iniciais. Levar em conta a premissa de que “o desenvolvimento da teoria sobre o cálculo de probabilidades esteve diretamente associado aos jogos de azar” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.13), mostra-nos um comprometimento no desenvolvimento do letramento; dada a necessidade de compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.

O material disponibiliza uma terceira tarefa envolvendo o processo de experimentação no lançamento de dois dados com o objetivo de posteriormente tratar a concepção clássica de probabilidade, aquela cujo cálculo é estabelecido pela razão entre a parte e o todo. Segue enunciado e instruções sobre o material para o exercício da realização de um experimento aleatório:

> Nesta atividade, sua sorte estará em jogo e, principalmente, sua habilidade em calcular com rapidez a probabilidade de ocorrência de alguns eventos relacionados ao lançamento de dois dados.
>
> Material do jogo: Dois dados: um deles com as faces contendo os números ímpares pintados de azul e os pares, de vermelho; e o outro com as faces contendo os números pares pintados de azul e os ímpares, de vermelho (SÃO PAULO, 2014-2017, p.18-19).

Na sequência do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014 - 2017), encontramos situação-problemas para o cálculo de probabilidades (problemas 4 a 10). Elaboramos o quadro 3 sobre o conteúdo destes problemas, cuja solução envolveu o enfoque clássico da Probabilidade, porém, sem destacar a condição da equiprobabilidade.

Quadro 3: Informações sobre os problemas 4 ao 8

Nº	Registro de entrada	Objeto	Considerações
4	figural (tabela de dupla entrada)	Peças geométricas com cores e formatos distintos	Há cálculos envolvendo eventos complementares (item ‘c’ ao ‘f’), porém, não é abordado no Caderno do Professor.
5, 6	figural (tabela de dupla entrada)	Distribuição de alunos por série do Ensino Médio	Os cálculos solicitados contém um custo cognitivo maior. No problema 5, é necessário que o aluno preste a atenção que o total de alunos mencionado na tabela são valores parciais.
7, 8	Língua natural	Percentual de alunos de uma escola por sexo e faixa etária	É esperado que o aluno faça uma conversão de registros, mobilizando o registro na língua natural para o registro figural (tabela de dupla entrada). Para obter a resposta esperada é importante trabalhar com os registros numéricos, a partir do cálculo da proporcionalidade.

Fonte: arquivo do pesquisador

Ressaltamos que os problemas 9 e 10 contém duas questões, relacionadas diretamente aos problemas 4 e 5, respectivamente.

Mais precisamente, em relação ao problema 8, solicita-se o cálculo da probabilidade condicional, porém, sem recorrer ao seu formalismo algébrico, conforme enunciado adaptado a seguir:

> Dos 300 alunos de uma escola, 45% são meninas e apenas 20% delas têm idade acima de 16 anos. Já entre os meninos, a porcentagem de alunos maiores de 16 anos é 40%. Considere o caso do sorteio de uma pessoa que, sabe-se de antemão, terá idade acima de 16 anos. Nessa condição:
> **a)** qual é a probabilidade de que seja sorteada uma menina?
> b) qual é a probabilidade de ser um menino?
> c) qual é a probabilidade de sortear um menino e ele ter 16 anos de idade ou menos? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.22-23)

Em nível de custo cognitivo, conforme a teoria dos registros de representação semiótica, é necessário que o aluno preste a atenção que no cálculo da razão entre a parte e o todo para calcular a probabilidade, o todo em questão é o total parcial para cada intervalo de idade, de acordo com a tabela 1:

Tabela 1: Tabela de dupla entrada do problema 7

Idade	Meninos	Meninas	Total
Acima de 16 anos	(40%) 66	(20%) 27	93
16 anos ou menos	(60%) 99	(80%) 108	207
Total	(55%) 165	(45%) 135	300

Fonte: Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014-2017, p.23)

Para finalizarmos a análise dessa Situação de Aprendizagem enfatizamos que nesse conjunto de problemas (4 ao 10) não é abordado o conceito de aleatoriedade, sobre o qual destaca-se que experimentos são aqueles que, se repetidos sob as mesmas condições, não necessariamente produzem resultados iguais. Mais uma vez, temos em mãos um conjunto de problemas deficitários para o desenvolvimento do letramento probabilístico, quando pensamos o quão é importante os alunos realizarem experimentos aleatórios que propiciam um conjunto de resultados cuja análise permitiria confrontar com os conceitos aqui destacados.

No Caderno do Professor sugerimos a inclusão de orientações que estimulassem os docentes a formular problemas ou escolher alguns deles propostos, para serem submetidos a um processo de experimentação. Tal proposta tem um forte apelo potencial para gerar resultados como aqueles apontados pela investigação de Caberlim (2015): associação da ideia de razão com a concepção clássica de probabilidade, bem como sua articulação com a concepção frequentista de probabilidade; em uma experiência aleatória há a delimitação do espaço amostral.

Análise da Situação de Aprendizagem (S2)

O conteúdo dessa situação de aprendizagem envolve a resolução de situações-problema da análise combinatória. No Currículo do Estado de São Paulo o raciocínio combinatório deve estabelecer conexões com o conceito de probabilidade ao recomendar o uso de "raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas" (SÃO PAULO, 2012, p.68).

No Caderno do Professor a primeira situação de aprendizagem envolveu o cálculo de probabilidade simples, sem a necessidade do raciocínio combinatório. No entanto, na segunda situação de aprendizagem, propõe-se como competências e habilidades a identificação em diferentes agrupamentos sobre a necessidade de ordenação ou não dos seus elementos, com o objetivo de calcular e associar um valor de probabilidade para o problema dado.

Na segunda situação de aprendizagem são propostos 38 problemas de análise combinatória que "envolvem a contagem de casos em situações de agrupamentos de determinado número de elementos" (SÃO PAULO, 2014-2017, p.24). De acordo com esse material, 100% dos problemas que envolvem agrupamentos são resolvidos por intermédio de operações entre números naturais. As operações exigem "a mobilização de estratégias de raciocínio semelhantes, quase sempre envolvendo uma das principais ideias da operação de multiplicação, a saber, o raciocínio combinatório" (SÃO PAULO, 2014-2017, p.25).

Em relação às estratégias didáticas, considera-se que um ensino de análise combinatória e probabilidade que abandona a ideia da representação da solução por meio do diagrama de árvores e priorizam a classificação dos problemas (permutações, arranjos e combinações),

> deixa de favorecer a diversidade de estratégias de resolução e, consequentemente, de percursos de aprendizagem, uma vez que a representação da solução do problema por intermédio de desenhos, diagramas e/ou tabelas é um dos comportamentos heurísticos reconhecidos como um dos mais importantes a serem mobilizados pelos estudantes quando enfrentam situações que são de fato problemas (SÃO PAULO, 2014-2017, p.25).

Dos 38 problemas propostos apenas dois envolvem o cálculo de probabilidade. As questões são oriundas de uma mesma situação redigida a partir de um desenho envolvendo

> 12 pessoas sentadas em uma arquibancada. Na fileira de trás estão 5 homens e uma mulher. Na fileira da frente estão 4 homens e duas mulheres. Entre as

> pessoas deste grupo, duas, da fileira da frente, usam óculos, e duas, da fileira de trás, também (SÃO PAULO, 2014-2017, p.42).

No problema 37 "Uma das pessoas sentadas será sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem da fileira da frente?" A resolução não envolve o raciocínio combinatório, apenas a razão entre o número de homens sentados na fileira da frente (4) em relação ao total de pessoas (12) (SÃO PAULO, 2014-2017, p.43).

No problema 38 "Se forem sorteadas duas pessoas, uma da fileira da frente e outra da fileira de trás, qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas pessoas de óculos?" A resolução envolve dois eventos independentes, cuja probabilidade é 2/6x2/6 = 1/9.

O diagrama de árvore foi utilizado em quatro situações. No problema 1, o diagrama foi utilizado para promover a escrita da multiplicação indicando o total de possibilidades de uma menina combinar quatro saias e cinco blusas diferentes. Em termos de letramento probabilístico, este tipo de problema convencional não traz contribuições ao aprendizado, pois suscita uma questão crítica: todas as combinações atendem o gosto da menina?

Nos outros casos adotaram a "representação das resoluções por intermédio das árvores ilustra os dois principais tipos de raciocínio envolvidos na totalidade dos problemas de análise combinatória: o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo" (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 28). Um exemplo clássico envolveu a contagem do número de anagramas. Em outra situação, foi abordada "a representação de uma parte da árvore de possibilidades para o seguinte problema: quantos grupos ordenáveis (filas) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?" (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 34).

No problema (número 21) envolvendo o uso do diagrama de árvore, o mesmo constituiu uma solução alternativa: "Há 10 bolas em uma caixa, todas iguais com exceção da cor, sendo 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Quantos conjuntos de 4 bolas podem ser formados sendo duas brancas e duas pretas?" (SÃO PAULO, 2014-2017, p.35-36).

> Nesse tipo de problema, em que mais de uma categoria está presente no grupo (homem/mulher, bola branca/bola preta etc.), é importante calcular a quantidade de agrupamentos de cada categoria para, depois, mostrar aos alunos que a quantidade total, envolvendo todas as categorias, pode ser obtida pelo produto das quantidades parciais. Nesses casos, para eliminar dúvidas, sugerimos que o professor recorra novamente à árvore (SÃO PAULO, 2014-2017, p.36).

Após a resolução do problema 26, as orientações didáticas apresentadas induzem às relações algébricas para agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis. Na formulação do problema 27, não é fornecido o número total de pessoas. O objetivo é que para um valor ‘n’, seja possível a utilização do fatorial:

> Em uma sala há n pessoas, com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos
> formar o grupo se ele tiver:
> a) apenas 1 elemento?   b) 2 elementos?   c) 3 elementos?
> d) 4 elementos?   e) p elementos, p<n? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.39).

A premissa inicial “sobre a ineficácia da aplicação de fórmulas de cálculo para um grande número de problemas de agrupamentos” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.29) foi modificada a partir do problema 27. Para este problema, por exemplo, passou-se adotar a expressão “sem maiores formalizações algébricas”; como forma de justificar a indução “do raciocínio dos alunos para a relação entre os arranjos simples e as combinações, isto é, $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ “(SÃO PAULO, 2014-2017, p.35).

Essa mudança de metodologia aplicada até o problema 36 foi acompanhada do seguinte alerta:

> enfatizamos que o estímulo à clássica categorização dos problemas em tipos – permutações, arranjos e combinações – e, consequentemente, o uso de fórmulas matemáticas, não devem ser tomados como preocupação central nesse momento da resolução de problemas. (SÃO PAULO, 2014-2017, p.43)

Em termos de registros de representação semiótica, a resolução desse conjunto de problemas de análise combinatória mobilizou e coordenou registro de língua natural (enunciado e respostas dos problemas), registros numéricos (aplicação do princípio aditivo e multiplicativo com ou sem a utilização do fatorial), registro algébrico (aplicação de fórmulas pertinentes aos agrupamentos) e registro figural (diagrama de árvores).

No que diz respeito ao letramento probabilístico, os problemas praticamente não trouxeram contribuições ao seu desenvolvimento, exceto pelos dois problemas (37 e 38) que envolveram o cálculo das probabilidades associado às noções básicas de combinatória. Em termos de linguagem, as palavras chance e possibilidade foram as mais utilizadas; o que tem ocorrido desde a primeira situação de aprendizagem.

Análise da Situação de Aprendizagem (S3)

O conjunto de dez problemas propostos não valorizou o diagrama de árvore como forma de registro figural em suas resoluções. Apresentamos em nosso aporte teórico, bem como na revisão bibliográfica, o estudo de Oliveira (2014), que tratou o fenômeno de congruência articulando a fórmula da probabilidade condicional com o desenvolvimento uma estrutura de árvore de probabilidades na versão completa. Na proposta dessa autora, houve a facilidade do acesso às probabilidades simples, condicionais e principalmente as da intersecção.

Os organizadores do Caderno do Professor não utilizaram nas resoluções a fórmula convencional da probabilidade condicional. O objetivo das soluções foi “caracterizar a necessidade de mobilizar raciocínio combinatório; identificar as semelhanças e as diferenças entre os diversos casos de probabilidade, no que diz respeito à ordenação ou não dos elementos que compõem os eventos” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.44).

Em termos de probabilidade, o texto não explicita o que quer dizer com as diferenças entre os diversos casos de probabilidade. Avaliamos que mais uma vez o enfoque probabilístico foi o clássico, pautado no raciocínio proporcional e multiplicativo.

No que diz respeito ao letramento probabilístico essa situação de aprendizagem contribui com três problemas (5 ao 7) envolvendo discussões sobre o jogo de loteria oficial Mega-Sena. As orientações didáticas contribuem significativamente para o desenvolvimento desse letramento, principalmente quanto ao elemento contexto; por envolver uma situação real.

Análise da Situação de Aprendizagem (S4)

Essa situação de aprendizagem intitulada “Probabilidade e raciocínio combinatório: o binômio de Newton e o triângulo de Pascal”, foi elaborada a partir da “resolução de problemas exemplares contextualizados” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.52).

Esse bloco de atividades tem como objeto levar o aluno a interpretar o resultado da probabilidade de ocorrência de um evento em **n** repetições de um mesmo experimento nas mesmas condições; sabendo que há apenas duas possibilidades, sucesso e fracasso. “Daí o termo **binômio** que tem como um dos exemplos mais comuns o lançamento de uma moeda certo número de vezes” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.52).

Além da moeda (problema 1), outros objetos com simetria geométrica foram utilizados: dado cúbico (problema 2, 3 e 4), bola (problema 6), baralho com 52 cartas (problema 14), dado na forma de tetraedro regular (problema 11), comparação entre o dado cúbico e a moeda (problema 7).

Em relação a este conjunto de problemas encontramos as expressões ‘moeda comum’ (problema 1) e ‘baralho normal’ (problema 14). Tais expressões são comumente associadas com a palavra ‘honesto’, o que implica em pensarmos em eventos equiprováveis, cujas probabilidades são calculadas com base na concepção clássica: a probabilidade de cada face da moeda honesta é ½ e de cada carta do baralho honesto é 1/52. Os demais problemas já mencionados levam em conta a probabilidade teórica (concepção clássica ou de Laplace) como base para os cálculos necessários.

O problema 5 contém um enunciado envolvendo dois eventos: sucesso (o televisor apresenta problema) e fracasso (o televisor funciona corretamente), cujo enunciado apresentamos a seguir:

> Estatisticamente, 1 em cada 10 televisores de determinada marca apresenta problemas de funcionamento. Uma loja de eletrodomésticos acaba de comprar 6 desses televisores para revender. Supondo que todos sejam vendidos, qual é a probabilidade de a loja receber reclamações de:
> **a)** nenhum comprador? **b)** apenas de 1 comprador? **c)** apenas de 2 compradores? **d)** 3 compradores? **e)** 4 compradores? **f)** 5 compradores? **g)** todos os compradores? (SÃO PAULO, 2014-2017, p.54).

A resolução presente nesse material para este problema envolveu

> os coeficientes binomiais, cuja abordagem metodológica sugerida para o professor faz referência ao fato de que esses coeficientes na forma $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, passam a significar a quantidade de ordenações possíveis entre o número de resultados esperados (p) e o de não esperados (n – p), e podem, assim, ser apresentados sem sobressaltos (SÃO PAULO, 2014-2017, p.54).

Em termos de registros de representação semiótica, foi mobilizado até esse problema a conversão do registro da língua natural para o registro numérico, cujo tratamento deste último registro envolveu a notação de fatorial.

Nos problemas 6, 7, 8, 10 até 12, a conversão da língua natural levou em conta implicitamente o registro algébrico envolvendo a generalização da “expressão do termo geral do binômio sem, todavia, amarrá-la diretamente à resolução de problemas” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.54).

No problema 9 a resolução pautou-se no conceito de probabilidade binomial levando em conta a chance do aluno ser sorteado (sucesso) e seu complemento (fracasso). O enunciado desse problema é: “Quatro prêmios iguais serão sorteados entre os 20 alunos de uma classe e há a possibilidade de qualquer aluno ser sorteado mais de uma vez. Qual é a probabilidade de Haroldo ser sorteado apenas no 2º sorteio?” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.57).

Detectamos erros conceituais no problema 12, cujo enunciado apresentamos abaixo:

> Utilize um gráfico de barras para representar todas as probabilidades envolvidas em 8 lançamentos seguidos de uma moeda, com a observação da ocorrência do evento cara na face superior (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 58).

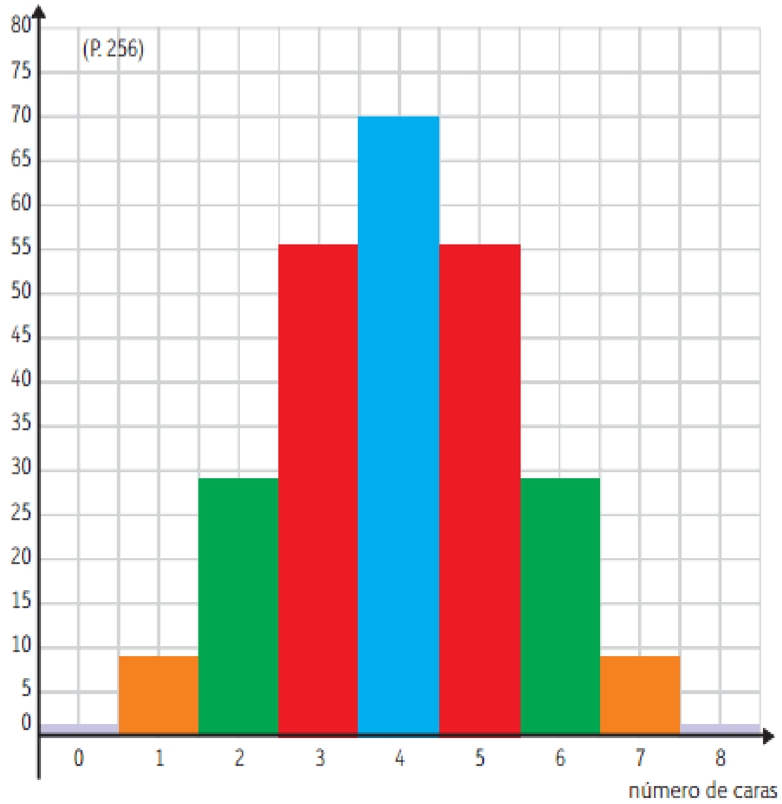
A solução sugerida pelo Caderno do Professor foi dividida em duas etapas, sendo a primeira o cálculo por meio dos coeficientes binomiais e posteriormente a construção do gráfico de barras. Em relação aos cálculos probabilísticos,

> As frequências dos números de caras, que poderão ser observadas em 8 lançamentos de uma moeda, coincidem com os números da linha 8 do triângulo de Pascal. Assim por exemplo, a probabilidade de que apareça em 5 dos 8 lançamentos é: P(5 caras em 8 lançamentos) = $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \binom{8}{5} = \frac{56}{256}$, dividindo por 256 cada um dos termos da linha 8 do triângulo de Pascal, teremos todas as probabilidades possíveis para esse experimento (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 58).

Assim como em todas as tarefas presentes nessa situação de aprendizagem, não há orientação quanto à realização do experimento aleatório, o qual propiciaria a abordagem das frequências da quantidade de caras e coroas em oito lançamentos de uma mesma moeda. O que se verifica na resollução é a associação teórica das frequências com a oitava linha do triângulo de Pascal, a qual o professor precisa estimular o alunos a identificar os referidos números e verificar que a soma é 256, ou seja, 1+8+28+56+70+56+28+8+1 = 256.

Feito este percurso, em termos de registros de representação semiótica, há uma conversão do registro de língua natural (enunciado) para um registro figural (construção do Triângulo de Pascal), que por sua vez converte no registro algébrico (aplicação da fórmula para os cálculos da probabilidade na distribuição binomial). A úlrima conversão partiu do registro algébrico para o registro gráfico (SÃO PAULO, 2014-2017, p 58), o qual apresentamos a seguir:

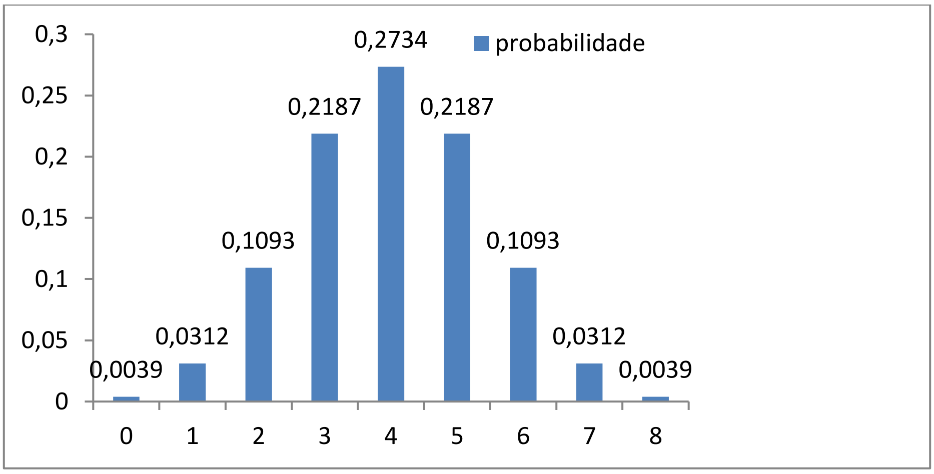
Gráfico 1: Histograma



Fonte: (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 58)

No entanto, quando observamos esse gráfico encontramos erros conceituais. O ‘gráfico 1’ apresentado no Caderno do Professor, contém colunas justapostas que é correto quando associado a uma variável aleatória contínua. No caso de uma distribuição binomial a variável aleatória é discreta, cuja representação gráfica correta seria associar para cada valor do número de caras (variável x) a respectiva probabilidade (P(x)) produzindo, assim, o gráfico 2:

Gráfico 2: Representação gráfica da tarefa 12



Fonte: adaptado de Oliveira (2010)

Nos problemas 13 e 14, o conteúdo da resolução envolveu o raciocinio combinatório desprovido da Probabilidade. Foi abordado o princípio multiplicativo em duas situações envolvendo formas distintas de agrupamentos.

Todas as tarefas propostas nesta situação de aprendizagem possuem a mesma estrutura, ou seja, o enunciado está na forma textual. As atividades matemáticas empregadas nas resoluções vão demandar a mobilização dos conhecimentos apreendidos anteriormente, principalmente referente ao raciocínio combinatório.

Considerações finais

Neste trabalho, buscamos respostas para duas questões de investigação. A primeira que diz respeito sobre os registros de representação semiótica mobilizados e coordenados nas diversas tarefas contidas nas Situações de Aprendizagem (S1 a S4) propostas no Caderno do professor. De modo geral, a resolução das tarefas demandou a conversão do registro na língua natural para o registro numérico. Esta limitação quanto ao uso de outros registros de representação semiótica como o registro figural na forma do diagrama de árvore, foi decorrente da ausência de conexões entre o raciocínio combinatório e probabilístico.

O privilégio pela concepção clássica de probabilidade inibe a realização de processos de experimentação probabilística, o qual poderia instigar o confronto e a análise do cálculo de probabilidades decorrentes das diferentes concepções probabilísticas. A realização do experimento promove a necessidade do aluno em raciocinar sobre as condições de tratar a aleatoriedade, o que demanda estratégias para a apresentação e interpretação dos resultados obtidos, os quais culminam no cálculo da probabilidade a partir das frequências.

A restrição na mobilização de registros de representação semiótica comprometeu o desenvolvimento do letramento estatístico, no que diz respeito aos elementos cognitivos. A ausência de tarefas que poderiam exigir o tratamento do registro de língua natural em tarefas envolvendo o uso do vocabulário próprio da probabilidade (chance, aleatório, provável, entre outros termos) comprometeu a aquisição da linguagem probabilística.

O contexto foi outro elemento cognitivo do desenvolvimento do letramento que foi pouco abordado, exceto pelo tratamento histórico da probabilidade que gerou algumas das tarefas contidas na Situação de Aprendizagem (S1).

O uso do registro gráfico no estudo da probabilidade é um recurso de representação semiótica que pode promover conexões com a estatística e a análise combinatória, promovendo o exercício do letramento estatístico na leitura e interpretação das informações obtidas em pesquisas estatísticas.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino médio -orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 2002.141p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 135p., 2006, v.2.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz. **Letramento probabilístico no ensino médio:** um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. 2015. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015.

CANAVEZE, Leila. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP**. 2013. 209f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2014.

COBELLO, Lucas Soares; OLIVEIRA, Paulo César. História e análise do currículo de matemática na escola básica no Estado de São Paulo. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. **Anais...** 12p. Ilhéus: UESC, 2015. CD-ROM.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

GAL, Iddo. Developing probability literacy: Needs and pressures stemmings from framewoks of adult competencies an mathematics curricula. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul. **Anais...** Seoul: COEX, 2012.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Graham A. Jones (ed.). **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and learning. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p. 43-71.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2012.

GODINO, Juan Diaz, BATANERO, Carmen; CAÑIZARES, Maria Jesus. **Azar y Probabilidad.** España: Editorial Síntesis, 1996.

LOPES, Celi Espasandin. A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 33ª, 2010, Caxambu. **Anais...** 15p. Rio de Janeiro: Anped, 2010. GT 19.

OLIVEIRA, Fábio Francisco de. **Probabilidade condicional:** proposta de um experimento de ensino envolvendo registros de representações semióticas. 2014. 223f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, Priscila Glauce de. **Probabilidade:** concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da teoria das concepções (CKc). 2010. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

SANTAELLA, L**. O que é Semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 1983.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo**: Matemática. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008. 64p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 2ª série do Ensino Médio, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SOARES, Magda. Letramento e alfabetização: as muitas facetas. **Revista Brasileira de Educação**, n.25, p.5-17, jan-abr. 2004.