

## O DESENVOLVIMENTO DO LETRAMENTO PROBABILÍSTICO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Ricardo Campanha Almagro<sup>1</sup>; Paulo César Oliveira<sup>2</sup>

[Acesse a apresentação deste trabalho.](#)

### RESUMO

Este texto é um extrato de um estudo desenvolvido na linha de pesquisa Psicologia da Educação Matemática do GEPLAM - UFSCar, mais especificamente, de natureza cognitiva ao estabelecer conexão entre o letramento probabilístico e os registros de representação semiótica. Foi uma pesquisa qualitativa com foco na aprendizagem de 87 estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Pilar do Sul- SP, envolvidos com a resolução de tarefas sobre Probabilidade e Combinatória. A produção das informações envolveu os registros escritos (protocolos) dos alunos e sua análise buscou responder que registros de representação semiótica foram mobilizados e coordenados por estudantes da 2ª série do Ensino Médio envolvidos com atividades de letramento probabilístico? Como um dos resultados da pesquisa, destacamos a necessidade de investir na linguagem probabilística.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Alfabetização estatística. Semiótica.

### INTRODUÇÃO

É notável que os fenômenos do acaso permeiam nossas vidas de várias maneiras. Noções sobre probabilidade, incerteza e risco aparecem em várias situações cotidianas, como por exemplo os boletins médicos sobre pacientes internados pela contaminação do COVID-19, os quais geralmente contém informações sobre a variabilidade e picos de febre, resultados laboratoriais de exame de sangue, urina e excreção, além do nível de oxigenação mecânica utilizada pelos pacientes no decorrer do tratamento hospitalar.

Em termos escolares, Gal (2005, 2012) sustenta que os estudantes devem se familiarizar com as diferentes formas de cálculo da probabilidade de eventos, para que, desta maneira, possam entender as afirmações probabilísticas feitas por outras pessoas, gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e ter condições de se comunicar adequadamente.

1 Licenciatura em Matemática, UFSCar, [ralmagro86@mail.com](mailto:ralmagro86@mail.com)

2 Licenciatura em Matemática, UFSCar, [paulodfcm@gmail.com](mailto:paulodfcm@gmail.com)

O tema ‘Letramento Estatístico e Probabilístico’ faz parte de uma das linhas de pesquisa desenvolvida pelos membros do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática – GEPLAM, coordenado pelo segundo autor deste relato de pesquisa. Da produção acadêmica disponível no site <http://www.geplam.ufscar.br>, destacamos um capítulo de livro intitulado “Um olhar para as pesquisas brasileiras sobre o letramento probabilístico de 2007 a 2018”, no qual foi feito um mapeamento de teses e dissertações brasileiras com foco no letramento probabilístico na perspectiva de Iddo Gal, tomando por base o acervo digital da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD (OLIVEIRA; PAIM; CUSTÓDIO; ALMAGRO, 2020).

Os resultados expostos por esses autores apontam possíveis avanços nessa temática de estudo, contribuindo de forma significativa na formulação da questão de investigação dessa pesquisa. Mais especificamente, Oliveira, Paim, Custódio e Almagro (2020), alertaram que em relação aos elementos cognitivos do modelo de Gal (2005, 2012) é necessário ampliar os contextos utilizados, pois, a utilização de jogos de azar na Educação Básica é o mais frequente e, em determinados casos, o único. Outro ponto importante para os propósitos de esta pesquisa diz respeito às potencialidades dos registros de representação semiótica no desenvolvimento do letramento probabilístico, dado o pressuposto da teoria de Raymond Duval de que a capacidade do estudante em mobilizar e coordenar pelo menos, dois registros distintos dessa natureza, é de suma importância na análise do processo de aprendizagem.

Em um cenário de pesquisa qualitativa, houve a participação de 87 estudantes distribuídos em 4 turmas de 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública do estado de São Paulo, envolvidos com a resolução de 6 tarefas que constituíram o produto educacional desta pesquisa. As tarefas foram aplicadas aos sujeitos de pesquisa na forma de um instrumento avaliativo em comum acordo com os professores responsáveis pelo processo de ensino-aprendizagem de Probabilidade e Combinatória nas referidas turmas do Ensino Médio.

A análise das atividades dos estudantes a partir da produção escrita (protocolos) gerada pela resolução das tarefas propostas, permitiram aos pesquisadores buscar respostas à questão de investigação: que registros de representação semiótica foram mobilizados e coordenados por estudantes da 2ª série do Ensino Médio envolvidos com atividades de letramento probabilístico?

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A pesquisa foi norteada pelo modelo de letramento probabilístico proposto por Iddo Gal associado à importância da mobilização e coordenação de registros de representação semiótica na perspectiva de Raymond Duval para a aprendizagem da Estatística, Probabilidade e Combinatória.

Para analisar o desenvolvimento do letramento probabilístico, Gal (2005) propôs um modelo que é dinâmico e depende das conexões entre os seus diversos elementos, a saber: elementos de disposição (atitudes do estudante em relação ao conhecimento: criticidade, crenças e atitudes, além dos sentimentos pessoais) e cognitivos, conforme disposto no Quadro 1:

Quadro 1 - Elementos Cognitivos do modelo de Iddo Gal.

Elemento cognitivo	Breve descrição
Grandes Ideias	Aleatoriedade, independência, variação, previsibilidade e incerteza e outras.
Cálculos Probabilísticos	Diferentes formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.
Linguagem	Os termos e os métodos utilizados para expressar os resultados probabilísticos.
Contexto	Compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos.
Questões críticas	Reflexões sobre assuntos no contexto de Probabilidade.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Duval (2016, p.3) parte da premissa que “fazer matemática requer compreensão em matemática”. Para responder o que significa fazer e aprender matemática do ponto de vista cognitivo, esse autor introduziu noção de registro de representação semiótica. A manifestação desta noção, segundo Duval (2016), surgiu da análise do ponto de vista cognitivo do aluno na atividade e no pensamento matemático desenvolvido em resolução de problemas.

A atividade cognitiva do aluno no estudo da Probabilidade requer a mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas entre o registro da língua natural (conteúdos dos enunciados ou abordagem de termos probabilísticos), registro figural (tabela de dupla entrada ou de contingência, além do diagrama de árvore) e o registro simbólico na forma algébrica (uso de fórmulas) ou numérica (cálculo da probabilidade). Para Duval (2016) não basta que o sujeito conheça o conteúdo de um registro, ou mesmo de vários isoladamente, mas sim que transite entre as mais diversas representações que possui o objeto matemático, no caso a Probabilidade.

## METODOLOGIA

Para responder a questão de investigação, a metodologia empregada foi pautada em uma abordagem de natureza qualitativa, pois nos preocupamos em analisar o desempenho dos alunos e não propriamente o número de acertos de cada um nas atividades aplicadas. Silveira e Córdova (2009) afirmam que a pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, entre outros.

O produto educacional foi concebido na forma de uma sequência didática contendo 6 tarefas, as quais foram aplicadas em sala de aula pelos professores responsáveis pelas turmas da 2ª série do Ensino Médio com a participação do pesquisador. A produção escrita (protocolos) dos alunos foi submetida à análise quantitativa e qualitativa. Para este texto, selecionamos a apresentação de duas tarefas, bem como a análise do ponto de vista quantitativo, a partir do desempenho dos alunos. Do ponto de vista qualitativo, interpretamos o desenvolvimento do letramento probabilístico a partir das representações semióticas mobilizadas e coordenadas no decorrer das atividades matemáticas produzidas pelos estudantes.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma das tarefas teve como foco a linguagem probabilística; um dos elementos cognitivos para o desenvolvimento do letramento probabilístico proposto

por Gal (2005). Apresentamos o propósito do pesquisador na formulação da tarefa, o desempenho dos alunos em cada uma das quatro turmas da 2ª série do Ensino Médio na resolução dos dois itens da tarefa, além de uma análise qualitativa com base em exemplos de protocolos elaborados pelos alunos.

A referida tarefa contém o seguinte enunciado: no nosso cotidiano muitas situações são de natureza aleatória; ou seja, situações nas quais suas ocorrências não podem ser antecipadas, embora satisfaçam condições básicas para podermos fazer previsões sobre os acontecimentos. a) Conte sobre alguma situação que você julga ser de natureza aleatória. b) Por que essa situação é de natureza aleatória?

Na formulação deste problema enfatizamos 3 elementos cognitivos do modelo proposto por Gal (2005), No que diz respeito à noção de aleatoriedade, o pesquisador almejava que um aluno do Ensino Médio tivesse condições de identificar uma situação aleatória do cotidiano, bem como descrever a aleatoriedade como ausência de certeza ou previsibilidade de seus resultados. Em termos de representação semiótica era esperado a utilização da língua materna para expressar de forma escrita as respostas para os dois itens levando em conta termos próprios da linguagem probabilística em diversos contextos como previsões climáticas, por exemplo. Na Tabela 1 apresentamos o percentual de acertos em cada uma das quatro turmas participantes da pesquisa:

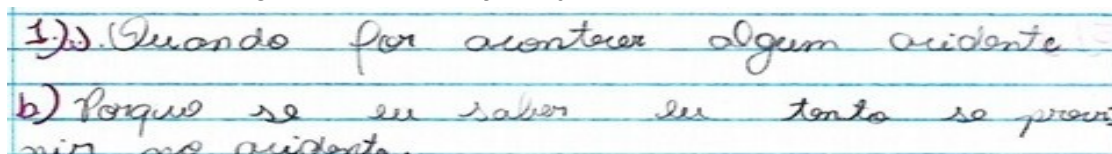
Tabela 1 - Percentual de acertos (item 'a' e 'b') nas diferentes turmas

Turma (n.º alunos)	19	23	21	24
% acerto (item 'a')	57,89%	86,96%	71,43%	75%
% acerto (item 'b')	36,84%	21,74%	30%	66,67%

Fonte: Elaborado pelos autores.

A quantidade de acertos no item (a) em relação item (b), em termos percentuais, evidencia que os alunos tiveram mais facilidade em propor situações de aleatoriedade do que justificar o fenômeno com suas próprias palavras. No que diz respeito à análise qualitativa da produção escrita dos alunos, selecionamos um protocolo apresentado na Figura 1:

Figura 1 - Identificação e justificativa sobre um fenômeno aleatório



Fonte: Elaborado pelos autores.

O fenômeno retratado no item 'a' da tarefa é aleatório. Quanto à justificativa o aluno expressa que apesar do imprevisível há situações em que é possível estabelecer um certo grau de controle, ou seja, "se eu soubesse" que pode ocorrer "eu tento me prevenir no acidente", com o objetivo de atenuar possíveis consequências graves diante da situação em que poderá estar envolvido.

A análise dos protocolos dos 87 estudantes sujeitos da pesquisa revelou que o uso da representação semiótica no registro da língua materna nesta tarefa. Houve na escrita da maioria dos alunos o emprego do vocabulário próprio da probabilidade, com os termos chance, provável, possibilidade, prever, ter certeza, antever, entre outros. Alunos com dificuldades no referido vocabulário, construíram frases similares, como por exemplo, ao querer se referir a um sorteio que é imprevisível, no sentido de que não há certeza do resultado final, alunos escreveram: "não fazemos ideia do que pode cair" ou "porque ninguém sabe o número que vai ser sorteado".

A segunda tarefa contém o seguinte enunciado: Em um globo usado para sorteio em loteria foram colocadas três bolas idênticas numeradas com 2, 5 e 7. Vamos formar números de três algarismos sorteando essas bolas. Depois de cada sorteio, a bola é recolocada no globo. Assim, podemos formar números com três algarismos como, por exemplo: 252, 777 e 725. a) Quantos números diferentes podem ser formados dessa maneira? b) Qual é a probabilidade de sortearmos 257? c) Qual é a probabilidade de o número ser 222? d) Podemos afirmar que um número formado por três algarismos repetidos têm menos chance de ocorrência que um número com algarismos não repetidos? Argumente.

No item (a) era esperado do aluno uma conversão da representação semiótica entre o registro da língua natural (enunciado) e o registro simbólico (forma numérica) pela aplicação do Princípio Multiplicativo da Contagem. Essa conversão de representação semiótica pode requerer um registro auxiliar na forma de um

diagrama de árvore (registro figural) para o processo de resolução desse item da tarefa.

O raciocínio combinatório empregado no item 'a' auxilia o cálculo da probabilidade de eventos equiprováveis (todos os elementos têm a mesma chance de ocorrência) presentes no item 'b' e 'c'. No item 'd' com o apoio do raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidade, a resolução desta parte final da tarefa requer o tratamento da representação semiótica no registro natural, ou seja, usar a argumentação escrita na atividade do aluno.

Na Tabela 2 apresentamos o percentual de acertos em cada uma das quatro turmas participantes da pesquisa para os 4 itens propostos nessa tarefa:

Tabela 2 - Percentual de acertos (item 'a' a 'd') nas diferentes turmas

Turma (n.º alunos)	19	23	21	24
% acerto (item 'a')	42,11%	43,48%	47,62%	91,67%
% acerto (item 'b')	26,32%	34,78%	5%	87,5%
% acerto (item 'c')	36,84%	30,43%	4,76%	75%
% acerto (item 'd')	0%	8,7%	0%	0%

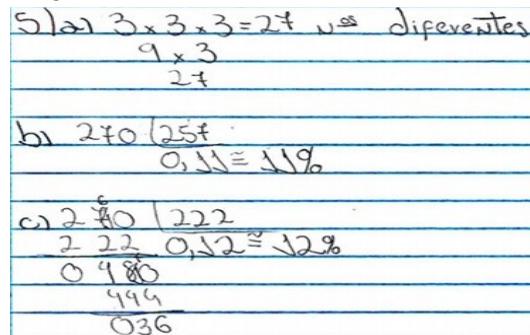
Fonte: Elaborado pelos autores.

O item 'a' apresentou em todas as turmas o maior percentual de acertos por entendermos que envolve um enunciado convencional no estudo da Combinatória. A medida que os demais itens envolveram a conexão de mais de um elemento cognitivo das "Grandes ideias" do modelo proposto por Gal (2005), os alunos apresentaram situações de fracasso escolar quanto ao desempenho representado pelo percentual de acertos.

Em relação aos itens 'b' até 'd' quando comparado com o item 'a' em termos de desempenho, temos como hipótese que não é frequente no estudo da Probabilidade, a conexão entre o raciocínio combinatório e ideias como aleatoriedade, envolvendo a extração de bolas idênticas. O resultado quantitativo mais delicado foi no item 'd', no qual os alunos tiveram dificuldades em argumentar sobre a chance de ocorrência de eventos probabilísticos ou não responderam esta parte da tarefa proposta.

No que diz respeito à análise qualitativa da produção escrita dos alunos, selecionamos um protocolo apresentado na Figura 2, no qual o item 'd' não contém a resolução:

Figura 2 – Respostas do item ‘a’ ao ‘c’:



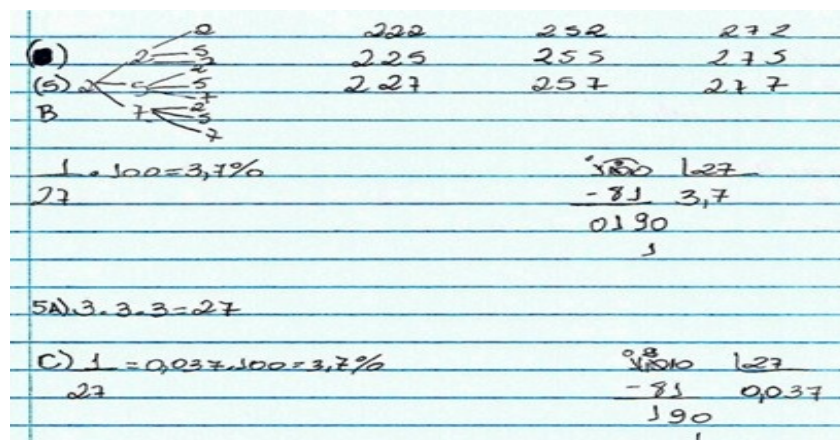
5) a)  $3 \times 3 \times 3 = 27$  us diferentes  
 $9 \times 3$   
 $27$   
 b)  $270 / 257$   
 $0,11 \approx 11\%$   
 c)  $270 / 222$   
 $222 \quad 0,12 \approx 12\%$   
 $0980$   
 $494$   
 $036$

Fonte: Elaborado pelos autores.

O conteúdo do item ‘a’ está correto, devido a aplicação do Princípio Multiplicativo da Contagem. Em relação ao item ‘b’ e ‘c’ o aluno não soube interpretar o significado dos elementos que compõe a razão entre o número de casos de um evento probabilístico e o número total de casos do espaço amostral. Ao efetuar a divisão entre 27 e 257, bem como 27 e 222, o aluno interpretou a razão para o cálculo da probabilidade de forma equivocada. Mais especificamente, o significado atribuído pelo aluno, envolveu a divisão entre o número de casos (27) e o valor de um elemento do espaço amostral (257 ou 222).

Na sequência apresentamos um protocolo (Figura 3) no qual o aluno apresentou parcialmente a conversão da representação semiótica entre o registro figural (Diagrama de árvore) e o registro simbólico na forma numérica (enumerabilidade das possibilidades):

Figura 3 – Utilização do Diagrama de árvore na atividade escrita do aluno



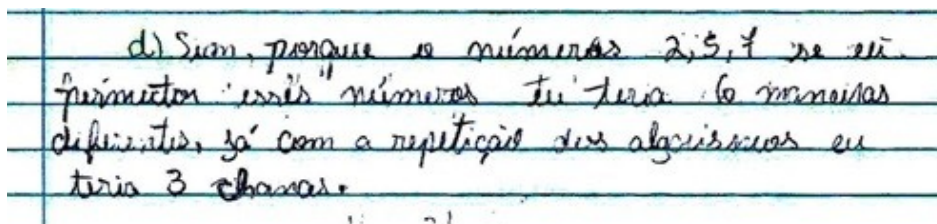
a)  $1 \cdot 100 = 3,7\%$   
 $27$   
 $1000 \quad 107$   
 $-83 \quad 3,7$   
 $0190$   
 $1$   
 5) a)  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$   
 c)  $1 = 0,037 \cdot 100 = 3,7\%$   
 $27$   
 $1000 \quad 107$   
 $-83 \quad 0,037$   
 $190$   
 $1$

Fonte: Elaborado pelos autores.



No protocolo da Figura 3, o aluno acertou o item ‘a’ recorrendo ao Princípio Multiplicativo da Contagem e obteve êxito no cálculo da probabilidade nos itens ‘b’ e ‘c’, porém, não respondeu a última parte da tarefa. Somente dois alunos apresentaram uma argumentação coerente na análise da chance de ocorrência da extração de bolas idênticas. Uma destas respostas está no conteúdo da Figura 4:

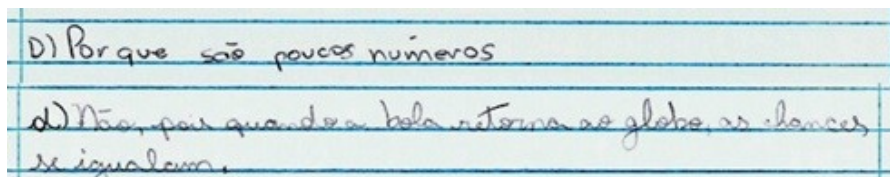
Figura 3 - Justificativa correta do item ‘d’


 d) Sim, porque os números 2, 5, 7 se en-  
 quimectam "isso" números tu tem 6 números  
 diferentes, só com a repetição dos algarismos eu  
 teria 3 chances.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em contrapartida, alguns alunos tiveram dificuldades em articular uma argumentação para a análise da chance de ocorrência na extração de bolas idênticas (item ‘d’). Apresentamos na Figura 4 dois desses registros escritos:

Figura 4: Argumentação inconsistente no item ‘d’:


 D) Porque são poucos números  
 d) Não, pois quando a bola retorna ao globo as chances  
 se igualam.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O primeiro registro escrito não contém uma análise sobre a chance de ocorrência de um número com algarismos não repetidos em relação ao número formado por três algarismos repetidos. O conteúdo da resposta “são poucos números” apenas expressa que o espaço amostral contém uma quantidade indefinida de elementos.

A segunda resposta “pois quando a bola retorna ao globo, as chances se igualam” contém um equívoco na linguagem probabilística utilizada, pois quando a bola extraída por sorteio retorna ao globo, na verdade, o espaço amostral não apresenta variabilidade.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise qualitativa dos protocolos dos alunos quanto à resolução das 6 tarefas, revelou a mobilização e coordenação de representações semióticas entre os registros da língua natural (materna) nos conteúdos dos enunciados ou nas abordagens de termos probabilísticos, os registros figurais (tabela de dupla entrada ou de contingência, ou como diagrama de árvore) e os registros simbólicos na forma algébrica (utilização de fórmulas) ou na forma numérica (razão para quantificar a probabilidade). Houve lacunas no letramento probabilístico como no cálculo de probabilidade, principalmente concepção frequentista por conta da dificuldade de trabalhar com processos de experimentação probabilística. Destacamos também dificuldades na enumeração das possibilidades em tarefas contendo o raciocínio combinatório em conexão com o raciocínio probabilístico.

## REFERÊNCIAS

Duval, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução de Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v.11, n.2, pp. 2-40, 2016.

GAL, Iddo. Developing probability literacy: Needs and pressures stemmings from framewoks of adult competencies an mathematics curricula. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul. **Proceedings...** Seoul: COEX, 2012.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Graham A. Jones (ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, pp. 43-71.

OLIVEIRA, Paulo César; PAIM, Sandra Aparecida de Oliveira Coelho; CUSTÓDIO, Leandro Aparecido Alves; ALMAGRO, Ricardo Campanha. Um olhar para as pesquisas brasileiras sobre o letramento probabilístico de 2007 a 2018. In: GUILHERME, Willian Douglas (org.). **A educação como diálogo intercultural e sua relação com as políticas públicas.** Ponta Grossa: Atena, v.2, 2020, pp. 66-78.

SILVEIRA, Denise Tolfo. CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa Científica. In: GERHARDT, Tatiana Engel, SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.). **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: Editora UFRGS, 2009, p. 31-42.