O SOFTWARE GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Profa. Me. Tânia Mara Amorim
Centro Universitário Nossa Senhora do Patrocínio – Campus Salto
taniaamorimnota1000@hotmail.com

Prof. Dr. Paulo César Oliveira
Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba
paulooliveira@ufscar.br

Resumo:
Esta investigação teve como objetivo principal viabilizar o estudo do conteúdo de números complexos para alunos da 3ª série do Ensino Médio, valorizando o enfoque geométrico. Para responder a questão de investigação (que contribuições o GeoGebra pode agregar na construção de saberes quando articulamos com a resolução de tarefas do Caderno do Aluno disponibilizado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo?), apoiamos na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os resultados dessa pesquisa de natureza qualitativa revelaram que a visualização gráfica oferecida pelo software contribuiu para a compreensão das operações algébricas com tais números. No entanto, ao optar por trabalhar sob a óptica geométrica dos números complexos, destacamos a importância do papel mediador do professor ao contribuir com o aluno na forma de se expressar matematicamente correto, na conversão do registro figural (imagem do computador) para o registro na língua natural (interpretação da imagem).
Palavras-chave: Números complexos; Ensino médio; Geogebra; Registro de Representação Semiótica.

1. Introdução

Na condição de professora da educação básica ao longo de 30 anos avaliamos que os documentos curriculares para o Ensino Médio tanto da educação paulista quanto aqueles da educação em nível nacional têm valorizado o contexto algébrico das operações com números complexos para subsidiar a resolução de equações polinomiais. Nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, encontramos que

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2002, p.119)

Esta citação em relação ao estudo dos números complexos gera incômodo, pois concebemos que o tratamento dos números complexos, articulando a geometria com a álgebra é uma oportunidade ímpar de estabelecer conexões internas com outros conteúdos da matemática como, por exemplo, geometria analítica, matrizes, entre outros.

Na dissertação de mestrado desenvolvida pela primeira autora deste artigo sob a orientação do segundo autor, traçamos como objetivo estudar os números complexos transitando nas suas diversas representações: algébrica, geométrica, vetorial, gráfica e trigonométrica.

Para tal estudo desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa cujo instrumento de produção de informações foi a aplicação de tarefas com base no material contido no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). Houve a inclusão do software GeoGebra na realização das atividades por parte de 13 alunos, em média, de uma turma de 3º série de uma escola pública do município de Capela do Alto, interior de São Paulo.

As atividades matemáticas com o software GeoGebra envolveram a utilização da regra do paralelogramo para o processo de construção e interpretação das operações de adição e subtração, relações envolvendo os ângulos e os módulos dos números complexos nas operações de multiplicação e divisão e a representação dos números complexos na sua forma trigonométrica.

O trabalho de campo desenvolvido de acordo com os princípios da engenharia didático buscou respostas sobre quais contribuições o GeoGebra pôde agregar na construção de saberes desses alunos quando articulado com a resolução de tarefas envolvendo os conteúdos já descritos com números complexos.

2. Números Complexos via Registros de Representações Semióticas

A matemática é permeada pela multiplicidade de representações, seja pela escrita na língua natural, linguagem algébrica, gráfico, entre outras. As representações de natureza semiótica permitem o acesso ao objeto matemático que na sua essência é abstrato. Este fato é um marco da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Para Duval (2009), a distinção entre objeto e representação é fundamental para a compreensão matemática. O alerta para que não haja confusão na relação objeto – representação deve-se ao fato de que diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático.

No caso do objeto matemático número complexo, podemos representá-lo a partir do registro algébrico ($z = a+bi$, com “a” e “b” elementos reais), registro na forma trigonométrica, matricial, entre outras.

A possibilidade de se representar um determinado objeto matemático através de pelo menos dois destes registros de representação, torna mais viável a compreensão em matemática, ou mesmo a capacidade de trocar a todo instante de registro de representação. Há dois tipos de transformações dos registros semióticos: os tratamentos e as conversões (DUVAL, 2009).

Ao realizar operações algébricas com números complexos como, por exemplo, adição; não mudamos o sistema de registro, o que configura uma transformação de tratamento. No caso de transitarmos por diferentes registros de natureza semiótica temos um processo de conversão, conforme ilustração a seguir:

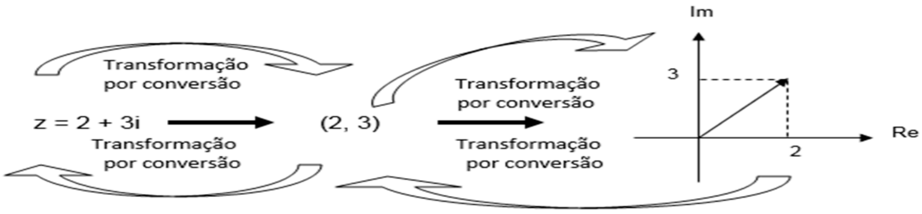


Figura 1: Diversidade de registros de representação semiótica

Na teoria de Raymond Duval uma discussão importante que se faz é com relação ao que o autor denomina de custo cognitivo, o qual está diretamente ligado ao fenômeno de congruência. Segundo Duval (2012, p. 283), "quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código". Retomando o conteúdo da figura 1, observamos a conversão da representação do número complexo na forma algébrica (z= 2+3i) para um registro na forma de par ordenado (2, 3) e este por sua vez, para a forma geométrica (ou gráfica). Neste processo de mobilização de diferentes registros com conteúdos distintos para o mesmo objeto matemático (número complexo) houve congruência; pois na conversão a representação terminal (no caso, a geométrica) deixa transparecer a representação de saída (no caso, a forma algébrica).

No entanto, nem sempre o processo da conversão é congruente. De acordo com Duval (2012, p. 284) "quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente".

No caso da nossa pesquisa, quando o enunciado das tarefas solicitou a conversão do registro na língua natural para o registro figural (imagem gerada pelo software GeoGebra) o custo cognitivo foi baixo; pois o fenômeno de congruência prevaleceu. Já no processo inverso de conversão destes registros semióticos citados, houve um diferencial no custo cognitivo devido a ausência da congruência. O alto custo cognitivo foi oriundo da solicitação que fizemos aos alunos para que após cada representação geométrica gerada no GeoGebra, os mesmos explicassem quais foram as conclusões obtidas de acordo com o enunciado proposto na tarefa.

Podemos ilustrar esta situação com o seguinte enunciado de tarefa presente no nosso trabalho de campo: *faça a operação de soma entre o número complexo e seu conjugado, utilizando a caixa de entrada do Geogebra. Que conclusão você chega em relação ao resultado obtido? Se você movimentar o* z_1*, o que acontece?* De onze alunos que resolveram estas duas questões, apenas uma aluna respondeu oralmente e de forma correta no decorrer das interlocuções travadas com a pesquisadora. O baixo rendimento decorreu do fato de não haver transparência entre a representação terminal (o vetor soma) e a representação de saída (no caso, a operação de adição do número complexo com o seu conjugado).

Mais precisamente, ao propor esta tarefa, procuramos fazer o aluno refletir sobre a relação de um número complexo com o seu conjugado, que está no fato da operação de adição entre eles gerar como resultado um número real; cuja representação vetorial pode ser associada ao eixo de simetria obtido pela configuração da regra do paralelogramo. A falta de transparência citada está exatamente no fato de que ao solicitar ao aluno que movimentasse o número complexo escolhido, esperávamos uma percepção generalista de que para qualquer número complexo somado com o seu conjugado o resultado é um número real.

Em termos de educação do Estado de São Paulo destacamos consolidação do novo Currículo (CESP) com base nas leis de Diretrizes e Bases Nacionais e na adoção de competências e habilidades contidas na matriz de avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Os conteúdos da Matemática foram organizados em três grandes temas que se inter-relacionam, a saber: Números, Geometria e Relações. Ao se deparar com os conteúdos elencados e habilidades que devem ser contempladas em relação aos Números Complexos, na 3ª série do Ensino Médio, percebe-se que o foco está na contextualização geométrica deste número, ou seja, segundo o CESP (São Paulo, 2010, p.69), no 2° bimestre do Ensino Médio temos o tópico do conteúdo a ser trabalhado “números complexos:

operações e representação geométrica”. Para as habilidades referente a este tópico, foram elencadas duas, a saber: “saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano Argand-Gauss” e “*compreender o significado geométrico das operações com números complexos”*, associando-as a transformações no plano”.

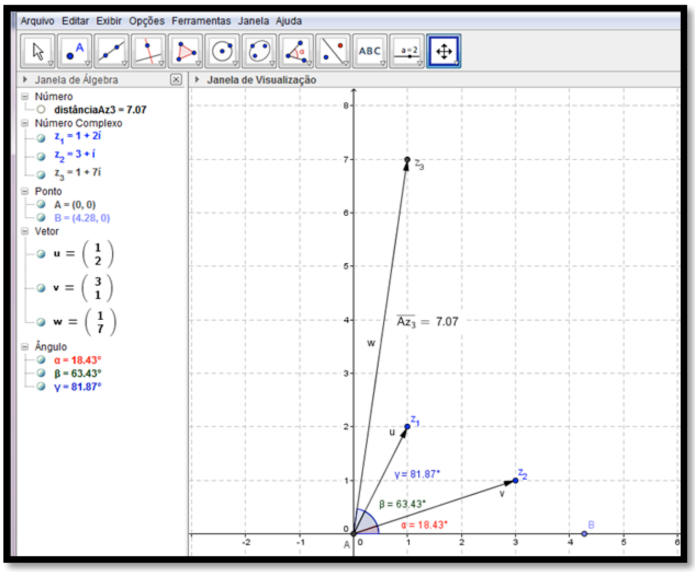
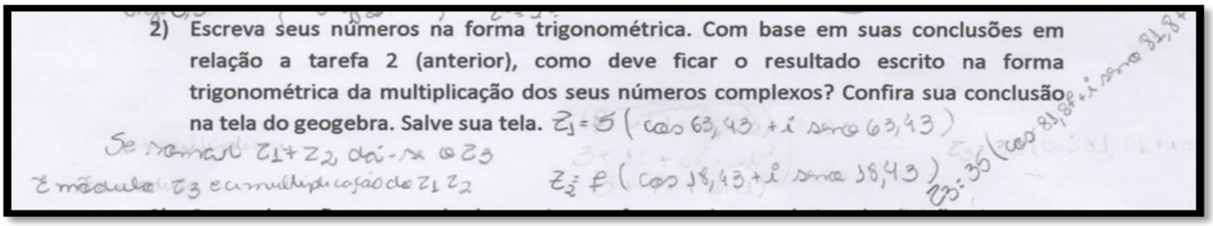


Figura 2: Atividade da aluna G – Geogebra



2) Escreva seus números na forma trigonométrica. Com base em suas conclusões em relação a tarefa 2 (anterior), como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da multiplicação dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do geogebra. Salve sua tela. $z_1 = 5$ (cos 63,43 + i seno 63,43)

Se somar $z_1 + z_2$ dá-se o z_3

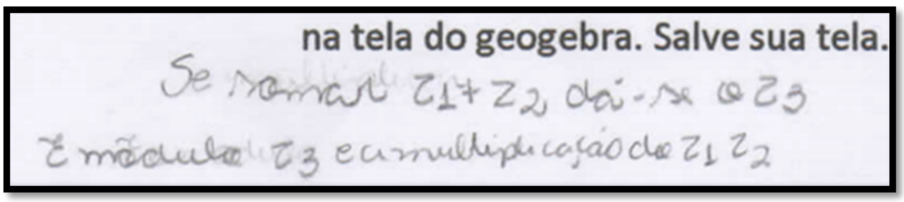
É módulo z_3 e a multiplicação de $z_1 z_2$

$z_2 = 5$ (cos 18,43 + i seno 18,43)

$z_3 = 35$ (cos 81,87 + i seno 81,87)

Figura 3: Atividade da aluna G - escrita

Fazendo uma ampliação na resposta da aluna, para que possa ser melhor visualizado temos:



na tela do geogebra. Salve sua tela.

Se somar $z_1 + z_2$ dá-se o z_3

É módulo z_3 e a multiplicação de $z_1 z_2$

Figura 3B: Atividade aluna G - escrita

Fica evidente pelo próprio CESP (São Paulo, 2010) que há uma contextualização geométrica no estudo envolvendo os números complexos e que não há como desvincular a forma algébrica de sua forma geométrica, pois o número perderia totalmente seu significado.

Vale ressaltar também que uma contextualização histórica dos números complexos, ou seja, dar ao discente a oportunidade de entender a necessidade do surgimento desses números, está respaldado na necessidade humana de busca por soluções e respostas de problemas.

No volume 1 do Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio (São Paulo, 2014), material complementar ao CESP, observamos que a contextualização histórica é pobre. O material apresenta o número *i* (imaginário) a partir do seu significado rotacional no plano. Em seguida apresenta o número na sua forma algébrica z =a + bi e elenca alguns números complexos para se realizar as operações (adição, subtração, multiplicação e potenciação). O que se tem a criticar é que em momento algum, apresenta-se o número como um par ordenado, e a importância de observar Regra do Paralelogramo na operação de adição/subtração, além das operações de potenciação e radiciação pela forma polar.

O que chama muito a atenção também é que a operação de divisão e a representação do conjugado de um complexo, não são apresentadas. Com relação à potência de um conjugado, deve-se salientar que se o expoente é maior que 2, a operação não é tão simples assim e requer que primeiramente o aluno aprenda sobre o módulo de um número complexo e a forma trigonométrica, para a partir disso operar a potenciação e a radiciação. Aliás, as operações de potenciação e radiciação pela forma trigonométrica nem são mencionadas. Trabalha-se com o módulo de um complexo e a conversão do registro algébrico para o trigonométrico, e vice versa, articulando estas conversões com o Plano Argand Gauss. Termina-se o conteúdo com alguns exercícios geométricos, porém sem levar ao aluno a refletir no seu significado em relação às aplicações.

Fica evidente que o material trata o assunto *Números Complexos* apenas para poder justificar no estudo dos polinômios, o aparecimento das raízes complexas.

3. A Metodologia da Pesquisa e Aplicações

A pesquisa foi realizada com uma amostra de 13 alunos (nem sempre todos presentes) do 3° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Dias Campos, na cidade de Capela do Alto/SP.

ISSN 2178-034X

A dinâmica da pesquisa obedeceu a seguinte sequência:

- Aplicou-se um teste contendo 22 questões, elaboradas a partir do Caderno do Aluno (SÃO PAULO/2014). O objetivo deste instrumento de produção de informações foi diagnosticar os saberes apreendidos sobre este conteúdo, durante o processo ensino-aprendizagem, com base nas tarefas propostas no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). Este diagnóstico foi fundamental para o planejamento das tarefas utilizando o software**.**

- Com base nas respostas obtidas no teste, elaborou-se quatro Tarefas, sendo que três tarefas com alternativas para serem realizadas com a utilização do GeoGebra e a Tarefa Final para que o aluno se manifestasse através de uma devolutiva sobre sua participação na pesquisa e sua percepção de aprendizagem com a utilização do GeoGebra.

Para análise da pesquisa, bem como das tarefas, utilizou-se da Engenharia Didática de Michèle Artigue, a qual para cada questão realizou-se uma análise a priori e a posteriori. Observa-se que para as três primeiras Tarefas, os alunos se deslocavam para o laboratório de informática na escola. Outro ponto importante também é que as Tarefas foram compostas de forma crescente e gradativa, permitindo ao aluno a construção de saberes.

A Engenharia Didática segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.66),

> vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

O pré-teste e pós-teste são etapas comuns em pesquisas envolvendo avaliação psicológica, por exemplo. Dada a constituição da amostra utiliza-se o pré-teste que geralmente são procedimentos de aplicação de instrumentos diagnósticos para servir de base a um processo de intervenção segundo os objetivos da pesquisa. Posteriormente submete-se a amostra à aplicação do pós-teste, ou seja, geralmente os sujeitos de pesquisa são reavaliados seguindo a mesma ordem e procedimento de aplicação dos instrumentos no pré-teste.

Nesta pesquisa, cumpriu-se as quatro fases que compõe a metodologia da Engenharia Didática proposta por Michèle Artigue (1988).

Na figura 4, visualiza-se o protocolo de uma das alternativas da tarefa 3 que foi aplicada.

Quando os alunos iniciaram a realização dessa atividade, percebeu-se que se eles utilizassem a forma de par ordenado para representar o número, não seria possível a operação de multiplicação usando o Geogebra (devido as limitações do software), dessa forma foi solicitado que eles utilizassem a forma algébrica do número complexo.

4) Escolha quatro números complexos e use a representação na forma de par ordenado no Geogebra. Agora una esses pontos, formando um quadrilátero. Multiplique os quatro complexos escolhidos pelo complexo z = 0 + 1i (ou simplesmente i). Uma os resultados formando um novo quadrilátero. Explique o que aconteceu. Salve sua tela

Figura 4: Alternativa 4

Esse tipo de atividade eles trabalharam no Caderno do Aluno (São Paulo, 2014, p. 79) anteriormente a aplicação das atividades com a utilização do Geogebra, por isso resolveu-se utiliza-las, pois a proposta em relação a isso é de que não basta apenas colocar essa informação no Caderno do Aluno, mas é necessário mostrar de que forma isso é utilizado no cotidiano dele. Acreditava-se que eles fariam as atividades, porém eles não imaginavam como elas estavam ligadas as suas próprias vidas.

O que observou-se é que 70% dos alunos (haviam 10 alunos presentes nesse dia) perceberam que houve uma rotação de 90° da figura. Um dos alunos relatou que a figura ampliou e mudou de lugar, outro aluno relata que os pontos se moveram 40° para a esquerda e outro aluno alega que a figura mudou de quadrante. Acreditou-se que esses três alunos não tenham compreendido corretamente o assunto quando foi trabalhado em sala de aula.

Para a Tarefa Final, foram feitos três questionamentos, dos quais ao todo, 10 alunos participaram.

TAREFA FINAL

1) Dê sua opinião sobre qual sua participação nesta pesquisa sobre os números complexos utilizando o software Geogebra. Você acha que a utilização do Geogebra pode ser um facilitador do aprendizado ou não? Crê que a aula é mais interessante ou não?

Figura 5: Alternativa 1

Pediu-se aos alunos que realmente fossem sinceros em suas opiniões, pois a informação era importante para a conclusão da pesquisa.

Para esse item, 100% dos alunos presentes responderam que:

- Gostaram de ter participado da pesquisa.
- A utilização do Geogebra tornou a aula mais interessante.
- Ajudou a compreender alguns pontos que não tinham sido plenamente compreendidos.
- A visualização da imagem permite compreender melhor a operação que se está realizando.

Na figura 6, podemos visualizar um dos protocolo do registro da aluna C, que participou ativamente nessa pesquisa em todas as etapas. Percebe-se pela fala da aluna, a satisfação de sua participação nessa pesquisa, mas que ao nosso olhar, também está no fato de que ela agregou saberes que não haviam sido plenamente compreendidos antes, na aula tradicional.

1) Dê sua opinião sobre qual sua participação nesta pesquisa sobre os números complexos utilizando o software Geogebra. Você acha que a utilização do Geogebra pode ser um facilitador do aprendizado ou não? Crê que a aula é mais interessante ou não?

Gostei muito de participar dessa pesquisa, e participei dando o meu melhor em todas as etapas. O geogebra é um ótimo software ~~Poo~~ pois fica mais interessante a aula.

Figura 6: Alternativa 1 – Resposta da aluna C

A resposta da aluna acima, vem confirmar a fala de Duval:

> De um ponto de vista cognitivo, os softwares trazem três grandes inovações. A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar "mentalmente" ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! É esta tripla inovação do ponto de vista cognitivo que gera o interesse e os benefícios pedagógicos dos ambientes informatizados no ensino de matemática. (2013, p. 32)

4. Considerações Finais

Não ficou dúvidas de que a utilização do software Geogebra como ferramenta de ensino e aprendizagem no ensino dos números complexos, trouxe uma grande contribuição, pois 70% dos alunos que participaram da pesquisa se sentiram motivados em conhecer mais sobre esses números, e de sua importância e utilidade. Lembrando ainda a fala de um aluno presente na apresentação final, onde depois de se mostrar algumas utilizações para os números complexos o mesmo concluiu que a todo tempo está utilizando-se de números complexos e suas operações quando está mexendo com suas fotos no computador.

O software Geogebra se mostrou uma ferramenta não somente eficiente para o aprendizado, mas também, motivacional, vindo confirmar aquilo que a pesquisadora acreditava. Claro que em relação ferramenta Geogebra se mostra muito eficiente para o ensino em vários campos de aplicação, mas principalmente se mostrou importante neste estudo, apesar de suas limitações para o estudo dos números complexos, porém, isso não tirou o mérito e eficiência do software para este estudo.

5. Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v.3, n.6, p.62-77, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+*: Ensino Médio -Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? *Práxis Educativa*, v.7, n.2, p. 305-330, jul/dez, 2012.

FRANCISCO, Deise Juliana; DAL TOÉ, Mabel Cristina; ALBERTI, Taís Fim. Processo de implementação de ambientes informatizados e a prática docente. *Psicologia Escolar e Educacional*, v. 6, n. 2, p. 177-184, 2002.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Caderno do Aluno:* 3ª série do Ensino Médio, v.2, Matemática. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, SEE: 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática*: 2º grau. 3ª ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.