

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Júlia Mayumi Uno¹

Paulo César Oliveira²

Eixo 7: Práticas Pedagógicas na Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

RESUMO

Este relato de experiência tem como objetivo apresentar uma possibilidade de ação docente, mediante a resolução de dois problemas por alunos de sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental, sob a perspectiva de George Polya. Um problema relacionou o conteúdo de simetria por reflexão e o outro a homotetia. O episódio envolvendo o tratamento desses problemas em sala de aula constituiu um dos instrumentos de avaliação elaborado pelo segundo autor deste texto, na disciplina Metodologia e Prática do Ensino de Matemática, oferecida no 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar, cuja autora foi aluna. Com atribuição de aulas em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, a autora deste relato escolheu os dois problemas com base nos conteúdos programáticos previstos e desenvolvidos de acordo com o livro didático adotado na escola da rede particular de Sorocaba, no estado de São Paulo. Durante a realização da sequência didática envolvendo os problemas, os diálogos entre os alunos e professora foram gravados em áudio e utilizados com a produção escrita dos estudantes na composição desse relatório. Para a análise da produção de informações, adotamos as quatro etapas fundamentais e necessárias para a resolução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Na interpretação das informações disponíveis vimos que na turma do 7º ano, apesar de interirmos na forma de apresentar o problema para a turma com o intuito de despertar o raciocínio dos alunos para o estabelecimento e execução de um plano de resolução, os mesmos se mostraram desinteressados por conta da professora não atribuir nota de modo a favorecer a média do último bimestre do ano letivo, período em que foram abordados os problemas.

Palavras-chave: Transformações geométricas. Isometria. Homotetia. Reflexão. Ensino Fundamental.

1 Discente do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), campus Sorocaba. E-mail: juliamayuno@gmail.com

2 Docente do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), campus Sorocaba. E-mail: paulooliveira@ufscar.br

INTRODUÇÃO

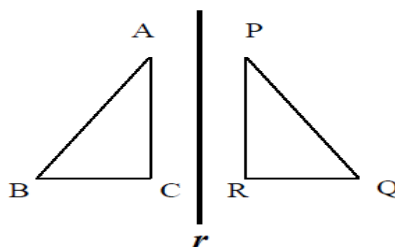
Quando pensamos na expressão “transformações geométricas”, usualmente, associamos às mudanças que podem ocorrer nas figuras geométricas (Nasser, Sousa e Pereira, 2004).

No contexto da educação básica a transformação geométrica pode deslocar um objeto de uma posição inicial a uma posição final sem alterar sua forma ou tamanho, o que designamos de isometria. O caso em que uma transformação não preserva as dimensões, mas mantém a mesma forma é denominada de homotetia, cuja característica é a semelhança entre a figura inicial e a figura final, via ampliação ou redução do objeto matemático original.

Como isometrias, vamos destacar a reflexão, translação e rotação.

A reflexão em relação a uma reta r (eixo de simetria) do plano, caracteriza-se por obter uma nova figura isométrica à figura original, devido ao fato de manter invariantes os comprimentos e a forma da figura. Porém, ao designarmos na figura original um determinado sentido ele aparece invertido na figura final, ou seja, a reflexão altera a orientação dos pontos do plano, conforme ilustração a seguir:

Figura 1: Reflexão em relação á reta r



Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.4)

Em termos de definição, dada uma reta r , uma figura é obtida de outra por uma reflexão de eixo r se cada ponto da figura original (por exemplo, os vértices do triângulo ABC) está na mesma perpendicular a r que o ponto P correspondente da figura refletida. Os pontos A e P, por exemplo, distam igualmente de r , e situam-se em semi-planos distintos em relação a r . (NASSER, SOUSA E PEREIRA, 2004)

Uma figura é obtida de outra via translação se dada uma direção r , todos os pontos da figura original se deslocam paralelamente a r , no mesmo sentido e direção, percorrendo a mesma distância. “A imagem de uma figura por translação

mantém sua forma e tamanho” (NASSER, SOUSA E PEREIRA, 2004, p.7), conforme exemplo a seguir:

Figura 2: Translação

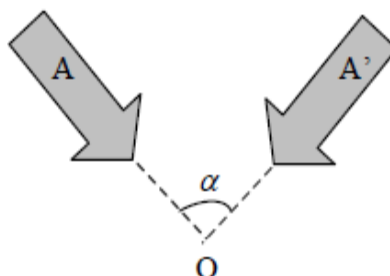


Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.7)

Diferentemente da translação, na rotação é necessário um eixo ou um ponto para que todos os pontos do plano se movimentem, girando em torno deste referencial de rotação. Nasser, Sousa e Pereira (2004) afirmaram que uma rotação de centro O e ângulo α é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida girando-se cada um dos seus pontos segundo o arco de circunferência de centro O ; correspondente ao ângulo α , no sentido fixado, que pode ser horário ou anti-horário.

Na imagem a seguir é possível observar que a rotação mantém invariantes os ângulos e comprimentos das figuras geométricas:

Figura 3: Rotação



Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.9)

Na condição de licencianda do curso de Matemática da UFSCar, especificamente no contexto da disciplina de 'Metodologia e Prática do Ensino de Matemática 1', estudamos concepções sobre Resolução de Problemas e orientações metodológicas para abordagem dos conteúdos matemáticos em sala de aula descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), entre outros itens da ementa. Como parte do processo avaliativo da disciplina, prescrito pelo docente (autor deste texto) responsável pela nossa turma, cada graduando escolheu uma das concepções abordadas e produziu um relato escrito sobre a ação docente. Essa ação diz respeito à análise de problemas abordados em turmas de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, apoiado sob uma concepção de resolução de problemas.

Vários colegas da nossa turma já estavam envolvidos também com o cumprimento das horas obrigatórias de Estágio Supervisionado e/ou ministrando aulas no Ensino Fundamental II ou Ensino Médio, de acordo com a atribuição. A autora deste relato de experiência é responsável pelas aulas em uma escola da rede particular do município de Sorocaba – SP, para turmas do Ensino Fundamental II.

Tendo em vista o desenvolvimento dos conteúdos programáticos para o ano letivo, escolhemos dois problemas cujo enunciado de um deles contemplou a reflexão no plano e o outro a homotetia. A abordagem deles em sala de aula contemplou a concepção de resolução de problemas desenvolvida por George Polya.

Nos próximos subtítulos apresentamos a heurística de resolução de problemas proposta por Polya (1978), o tratamento metodológico dos conteúdos citados nos PCN (BRASIL, 1998) e o relato da abordagem dos dois problemas com alunos de 6º e 7º ano do Ensino Fundamental, sob a responsabilidade da professora e autora deste texto.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR GEORGE POLYA

O trabalho de George Polya (1978) retoma a ideia da heurística, a arte da descoberta. Em seu livro *A arte de resolver problemas*, Polya dedica o terceiro e mais longo capítulo a um Pequeno Dicionário de Heurística, e no verbete Heurística, lemos: “o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção” (POLYA, 1978, p.86).

Para Polya (1978), resolver um problema de qualquer tipo é contornar um obstáculo. Basicamente, este autor tratou de dois tipos de problemas: os de demonstração e os de determinação. Os problemas de determinação são mais importantes na Matemática elementar; os problemas de demonstração o são na Matemática superior. Vamos nos ater ao primeiro tipo, com o qual trabalhamos em nossas duas tarefas.

Para resolver um problema de determinação é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a incógnita, os dados e a condicionante, ou seja, as circunstâncias que devem ser observadas no enunciado. No referido livro, Polya (1978) indicou que há quatro etapas

fundamentais e necessárias para a resolução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Na etapa de compreensão do problema, o primeiro passo é entender o problema. É importante fazer perguntas, tais como: qual é a incógnita? Quais são os dados? É possível satisfazer as condicionantes?

Quanto ao estabelecimento de um plano (2ª etapa) é possível determiná-lo quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O principal feito na resolução de um problema é encontrar conexões entre os dados e a incógnita.

Frequentemente, a execução do plano é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acabam se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução (e, deste modo, acabam sendo obrigados a voltar para a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia).

Se fizerem um retrospecto (4ª etapa) da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. A revisão da solução é a etapa mais importante, segundo Polya (1978), pois esta etapa propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema.

Todas as etapas apresentadas têm a sua importância. Pular qualquer uma delas ou não dar-lhes a devida atenção resultará na não compreensão do problema. Cada passo deve ser bem planejado, caso contrário podem acontecer falhas na execução do plano, comprometendo os resultados obtidos.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO: ASPECTOS CURRICULARES

Aprender e ensinar Matemática no Ensino Fundamental II pressupõe a análise da tríade aluno-professor-saber. O professor deve desempenhar o papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, levando em conta, que

tornar o saber matemático acumulado um saber escolar exige um tratamento deste conhecimento de modo a transformá-lo em informação (BRASIL, 1998).

Em um dos blocos temáticos, o Espaço e Forma, destacamos para o 6º e 7º ano

a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51)

Em termos de conceitos e procedimentos os PCN (BRASIL, 1998) contemplaram a classificação de figuras bidimensionais e tridimensionais segundo diversos critérios, entre eles, pela determinação dos eixos de simetria de um polígono. Vale ressaltar que no caso dos objetos tridimensionais devemos utilizar planos de simetria. Ainda em relação ao conceito de simetria vale destacar as isometrias de reflexão, translação e rotação, além da identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, ângulos e comprimentos).

Para o 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, não observamos uma amplitude no estudo de simetria, conforme fragmento a seguir:

Construindo figuras a partir de reflexão por translação, por rotação, de uma figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). (BRASIL, 1998, p.86)

Na seção de orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, “o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência” (BRASIL, 1998, p.124). Além disso, recomenda-se que o conceito seja também observado em situações cotidianas, enfatizando que em inúmeros casos temos aproximações de planos simétricos e nas respectivas representações planas tais planos reduzem a eixos de simetria.

A escola em que ocorreu o desenvolvimento dos problemas utiliza um livro didático para as turmas do Ensino Fundamental II. A seguir, apresentamos o contexto que norteou a fase empírica do processo de avaliação da disciplina que a autora estava cursando na Licenciatura.

OS PROBLEMAS PROPOSTOS E O CONTEXTO ESCOLAR

No colégio da rede particular de Sorocaba, no qual atua a autora deste relato com atribuição de aulas de matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, é utilizado o livro didático Projeto Araribá Plus (SÃO PAULO, 2014).

Em relação ao estudo das transformações geométricas, nesse livro didático, destacam-se as ampliações e reduções de figuras, incluída aí a homotetia, com a noção de simetria de reflexão realizada por meio de dobraduras e de construção em malhas quadriculadas. A propriedade da simetria de reflexão é abordada no material didático do 6º ano, enquanto a homotetia é tratada no 9º ano do Ensino Fundamental.

O primeiro problema formulado foi utilizado com a turma do 6º ano do Ensino Fundamental. Seu enunciado original é de autoria de Vieira, Paulo e Allevalo (2013) e com a adaptação que fizemos, segue sua formulação: “O Corpo de Bombeiros da cidade renovou sua frota de ambulâncias. Para facilitar a identificação dos veículos nas ruas da cidade, o chefe da corporação pediu para que fosse pintada na parte frontal das ambulâncias a palavra RESGATE, mas de forma que qualquer motorista pode identificar o veículo oficial através do espelho retrovisor de seu carro. De que maneira a palavra RESGATE deve ser pintada nas ambulâncias para que o motorista do carro à frente consiga ler corretamente a palavra pintada através de seu espelho retrovisor? Seguindo os mesmos padrões, o chefe também pediu que pintassem caminhões com a palavra BOMBEIROS. Como ela deve ser pintada?”

Tomando por base os pressupostos teóricos de Polya (1978) a heurística deste problema pode ser baseada no uso de um espelho, de modo que os alunos percebam o que acontece quando uma imagem é refletida nele. Espera-se que eles observem que a figura fica invertida em relação à original e que, com isso, consigam imaginar como seria o reflexo de uma imagem sem ao menos precisar de um espelho. É muito provável que haja mais de uma solução proposta pelos alunos.

Propusemos o segundo problema para a turma de 7º ano do Ensino Fundamental, embora o conceito de homotetia seja abordado no material didático do 9º ano. No 7º ano os alunos já apresentaram saberes prévios (ângulos, medidas, razões e proporções); os quais permitem que o aluno resolva o problema envolvendo homotetia.

O conteúdo do enunciado é: 'Um arquiteto recebeu uma planta de um cômodo na escala 1:100 e deve modificá-la até obter uma escala de 1:50. Ele deve aumentar ou diminuir as dimensões da planta? Em quantas vezes?'

Para tornar a resolução desse problema mais interessante, o professor pode propor que os alunos desenhem a planta de um cômodo simples numa folha quadriculada e troquem entre si, para que cada um amplie o desenho do colega. É importante que, ao final da resolução, os alunos percebam que as dimensões da planta aumentaram proporcionalmente, ou seja, a figura não foi deformada, apenas mudou dobrou de tamanho.

PROBLEMA ENVOLVENDO A SIMETRIA DE REFLEXÃO

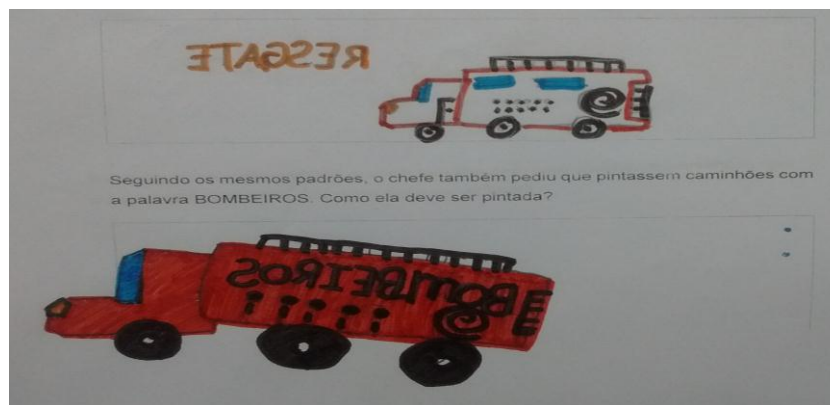
Esse problema foi trabalhado com a turma do 6º ano, composta por 17 alunos. Após a leitura do problema, os alunos se prontificaram em discutir caminhos para a resolução.

Em meio à tarefa de resolução de problemas, a postura desta professora centrou-se em minimizar a intervenção na forma dos alunos tentarem alcançar a solução. Ao refletir sobre as atitudes dos meus alunos e confrontar com a ideia de heurística que Polya (1978) defendeu como a arte da descoberta, o que mais me impressionou foi a criatividade dos alunos para estabelecer um plano de resolução. Mesmo sem espelho, a maioria dos alunos conseguiu verificar a solução de várias maneiras diferentes.

A execução do plano envolveu o uso do celular para tirar uma foto da resposta julgada correta e ao invertê-la utilizando um aplicativo de edição de fotos, escreveram a palavra no verso da folha de sulfite. Através dela, conseguiram escrever ao contrário, observaram o reflexo da folha na porta da sala de aula, a qual é espelhada por conta do *insulfilm*. Esta atitude dos alunos condiz com a etapa do retrospecto proposto por Polya (1978) que visa a reavaliação da solução encontrada.

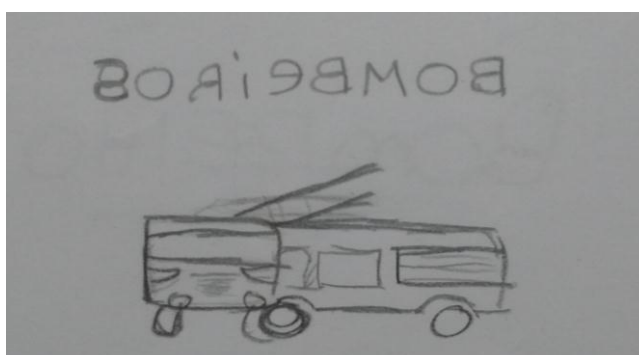
A seguir apresentamos duas produções escritas (Figura 1 e 2) com requintes artísticos:

Figura 1 – Simetria por reflexão das duas palavras



Fonte: arquivo dos autores

Figura 2 - Simetria por reflexão da palavra 'Bombeiro'

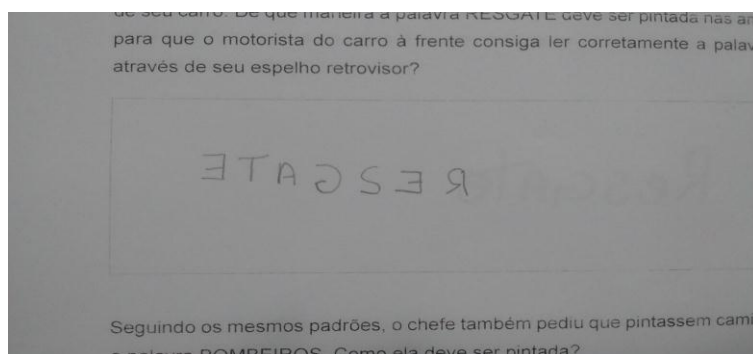


Fonte: arquivo dos autores

Como esperado, surgiram soluções diferentes. Alguns alunos esqueceram de inverter uma ou duas letras na palavra. Ao serem questionados sobre o que a etapa do retrospecto da solução revelou, os alunos afirmaram que 'por falta de costume em escrever ao contrário', erraram ao reproduzir a palavra no papel.

Na sequência, apresentamos dois protocolos escritos com a respectiva identificação do erro (Figura 3 e 4). No caso da figura 3, a aluna não inverteu a letra S:

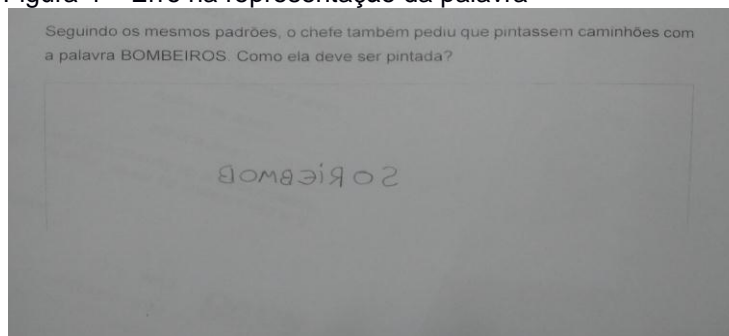
Figura 3 – Erro na simetria por reflexão



Fonte: arquivo dos autores

Na figura 4, a aluna manteve a ordem original das letras:

Figura 4 – Erro na representação da palavra



Fonte: arquivo dos autores

PROBLEMA ENVOLVENDO A HOMOTETIA

O segundo problema foi trabalhado com a turma do 7º ano, aquela com maior número de alunos matriculados, 28 no total. A professora fez a leitura do enunciado coletivamente e, mediante ao questionamento de um aluno ('vai valer quanto na nota bimestral?'), foi explicado que a atividade não geraria 'bônus' (benefício) na média do quarto bimestre.

O fato de não ter associado a tarefa com uma 'nota' não despertou interesse e compromisso dos alunos quanto à resolução do problema. Na questão 'Um arquiteto recebeu uma planta de um cômodo na escala 1:100 e deve modificá-la até obter uma escala de 1:50. Ele deve aumentar ou diminuir as dimensões da planta? Em quantas vezes?', apenas dois alunos responderam as duas questões corretamente. A maioria dos alunos escreveu que o arquiteto deveria 'diminuir' a planta.

Ao questionar os alunos, observei que eles não perceberam que a escala é uma forma de razão, a qual "estabelece uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, denotada por a/b , ou $a:b$ (*a está para b*), em que 'a' é denominado **antecedente** e 'b' é denominado **consequente**" (Onuchic, Allevalo, 2008, p.96-97, negrito das autoras).

Na etapa de compreensão do problema, os alunos não conseguiram observar quais são os condicionantes, ou seja, aquilo que estabelece condições para que a planta de um cômodo seja modificada na escala 1:100 para 1:50. Ao escrever que as dimensões da planta devem ser diminuídas pela metade, os

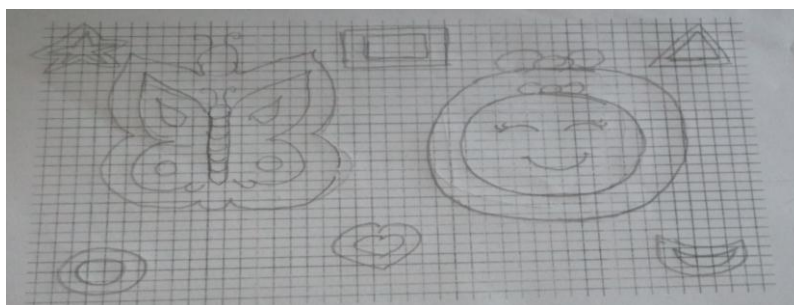
alunos consideraram apenas a comparação envolvendo os valores do termo 'b' (consequente).

A professora coletivamente com os alunos fez o retrospecto das resoluções apresentadas para que os mesmos observassem que as respostas, na maioria errada ou incompleta, não satisfizeram os condicionantes do problema.

Para refazer o ciclo das quatro etapas fundamentais e necessárias para a resolução de problemas, segundo Polya (1978), a professora propôs aos alunos o uso do papel quadriculado, o qual é muito incentivado como orientação didática-pedagógica contida no livro didático adotado pelos professores de matemática da referida escola. Atrelado a isto, foi oferecido um problema similar ao original: 'faça um desenho e com o auxílio da malha quadriculada, amplie-o em duas vezes'.

Na correção das atividades dos alunos, alguns realizaram a ampliação solicitada, porém sem utilizar a malha quadriculada, o que comprometeu a escala (razão) proposta, conforme exemplo a seguir:

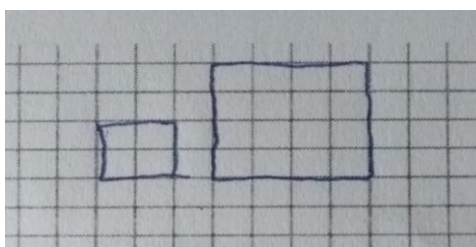
Figura 5 – Produção escrita de uma aluna sem a utilização da escala



Fonte: arquivo dos autores

Encontramos outras produções dos alunos que utilizaram a escala corretamente, porém, no desenho do polígono, não houve o uso da régua, contrariando a orientação da professora. A seguir mostramos a homotetia aplicada no desenho do quadrado:

Figura 6 – Ampliação do quadrado



Fonte: arquivo dos autores

Este problema similar propiciou revisarmos as etapas de resolução de problemas, pois o desempenho dos alunos melhorou, embora a resistência de

vários estudantes quanto à resolução do problema por conta da ausência da 'nota' permaneceu.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vias de terminar este relato, foi pertinente uma autoavaliação dessa experiência. O foco dessa autoavaliação foi refletir sobre o que poderíamos complementar em sala de aula nos momentos de discussões coletivas com os alunos. Revendo as etapas de resolução de problemas propostas por Polya (1998), a interação coletiva com seus alunos deu-se na fase de retrospecto, pois nas demais, a professora fez o mínimo de intervenções possível, adotando uma postura condizente com a perspectiva metodológica em questão.

Nas interações com a turma, a interlocução foi centrada na análise da solução obtida pelos alunos. Cumprimos o ciclo previsto por Polya (1998), porém, deixamos de abordar juntos aos alunos as invariâncias nas transformações geométricas do plano (medidas dos lados, ângulos e comprimentos). Se entrelaçarmos a análise da base conceitual requerida no contexto do problema com a execução das etapas propostas por Polya (1978), potencializamos o seu modelo de resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Fundamental II**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

GAY, Mara Regina Garcia. **Projeto Araribá Plus – Matemática**. São Paulo: Moderna, 2014.

NASSER, Lilian; SOUSA, Geneci A. de ; PEREIRA, José Alexandre. Explorando a geometria do ensino fundamental por meio de reflexões, translações e rotações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 19p. Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n.31, p. 79 a 102, 2008.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

VIEIRA, Gilberto, PAULO, Rosa Monteiro e ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Simetria no ensino fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Bolema**, Rio Claro, v.27, n.46, p. 613-630, 2013.