09

UMA ABORDAGEM FUZZY PARA O DESEMPENHO ESCOLAR NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM

Gustavo Cavani Teles da Silva
Universidade Federal de São Carlos

Camila Lunetta
Universidade Federal de São Carlos

Magda da Silva Peixoto
Universidade Federal de São Carlos

Paulo César Oliveira
Universidade Federal de São Carlos

doi 10.37885/230312267

RESUMO

Objetivo: Propor um modelo matemático baseado na Teoria dos Conjuntos Fuzzy para auxiliar o docente na tarefa de avaliação das aprendizagens discentes. **Métodos:** Avaliar o processo de ensino-aprendizagem e mensurar o desempenho discente pode ser uma tarefa complexa e subjetiva. Dessa forma, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, por meio de equações relacionais fuzzy, é uma ferramenta destacável para este processo. **Resultados:** A partir do cálculo de equações relacionais fuzzy foi possível obter o desempenho de cada aluno com os respectivos graus de pertinência de três diferentes menções (Insuficiente, Regular e Bom). **Conclusão:** Dessa maneira, este modelo pretende ser uma ferramenta para auxiliar o professor na tarefa de avaliação das aprendizagens discentes.

Palavras-chave: Avaliação, Conjuntos Fuzzy, Relações Fuzzy.

INTRODUÇÃO

Pode-se dizer que a avaliação do processo de ensino-aprendizagem busca conhecer o nível de desempenho discente, considerando o processo educativo e tomada de decisões que possibilitem atingir os resultados esperados. Medir o conhecimento adquirido em uma determinada disciplina, por exemplo, é uma tarefa complexa e subjetiva e, para isso, adequado o modelo de avaliação, por levar em conta o acompanhamento processual do aluno, em uma relação espaço-tempo ocorrida em um contexto escolar (FORNER; TREVISOL, 2012). O planejamento de quais e quantos instrumentos serão considerados no processo avaliativo depende de cada instituição, do docente e do público-alvo. Geralmente, ao final da disciplina, o aluno recebe um conceito ou nota, por meio de algum cálculo matemático, que representa o seu desempenho. Porém, esse valor obtido pode não deixar claro o conhecimento que o aluno realmente adquiriu.

Pensando no exposto acima, este trabalho de pesquisa traz uma ferramenta alternativa, com o uso da Teoria do Conjuntos Fuzzy, para auxiliar o professor na complexa tarefa de avaliação das aprendizagens discentes, buscando considerar aspectos subjetivos inerentes ao processo avaliativo. A principal vantagem do modelo a ser proposto é a possibilidade de classificar o desempenho dos discentes, considerando o uso de diferentes critérios (variáveis de entrada) para a composição da nota final (variável de saída), a partir de termos linguísticos como, por exemplo, Insuficiente, Regular e Bom, usando informações qualitativas e quantitativas, que são tratadas como conjuntos fuzzy (SILVA, LUNETTA e PEIXOTO, 2022; SILVA, 2023).

MÉTODOS

A Teoria de Conjuntos Fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi desenvolvida para representar o conhecimento incerto e impreciso. Ela fornece um meio aproximado, mas eficaz, de descrever o comportamento de um sistema que é muito complexo, mal definido, com poucos dados. O marco inicial da Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi o artigo publicado em 1965, pelo matemático Lotfi Asker Zadeh, professor no Departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley (ZADEH, 1965). Sua principal intenção era dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos. Esse seria o primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas. A ideia de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos, criando a noção de grau de pertinência. Um elemento poderia pertencer parcialmente a um dado conjunto. Para modelar matematicamente o tal "conjunto", Zadeh propôs o conceito de conjunto fuzzy a partir de uma função de pertinência que indica o quanto um elemento faz parte do conjunto fuzzy.

Em situações como "*aquela pessoa é muito alta*?" ou "*está com pouca dor?*", respostas como "*sim*" ou "*não*" nem sempre representam o que se deseja expressar. De certa maneira, "*alta*" e "*dor*" podem representar subjetividade, pois é difícil definir, com precisão, o que é exatamente ser alta ou ter dor. Quando trabalhamos com conjuntos fuzzy, tal imprecisão é associada com uma função, que chamamos de função de pertinência e, deste modo, conseguimos definir o quanto é ser "*muito alta*" *ou estar* "com pouca dor".

Dessa forma, a seguir, serão definidos os conceitos básicos de Teoria dos Conjuntos Fuzzy (BARROS; BASSANEZI, 2010; NICOLETTI; CAMARGO, 2011; PISSINI, 2019; BELLUCCI, 2009; MARINS, 2016; SILVA, 2020).

Para um conjunto fuzzy é definida uma função de pertinência que atribui valor entre 0 e 1 para cada elemento do conjunto universo, estabelecendo um grau de pertinência do elemento ao conjunto definido. O grau de pertinência de um elemento do conjunto universo a um conjunto fuzzy expressa o grau de compatibilidade do elemento com o conceito representado pelo conjunto fuzzy.

Definição 1. Seja U um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função φ_F:U→[0,1], pré-fixada, chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F.

O valor $\varphi_F \in [0,1]$ indica o grau de pertinência do elemento x de U está no conjunto fuzzy F, ou seja, os valores $\varphi_F(x) = 1$ e $\varphi_F(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e não pertinência do elemento x a F. Assim, pode-se dizer que um subconjunto fuzzy F de U é dado por:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)) \mid x \in U\}.$$

O subconjunto clássico de U definido por supp $F = \{x \in U\colon \varphi_F(x) > 0\}$ é denominado suporte de F e tem fundamental participação na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e fuzzy (BARROS; BASSANEZI, 2010).

O conceito de suporte de um subconjunto fuzzy F definido em U é importante e interpretado como sendo o conjunto formado pelos elementos de U cujos elementos têm grau de pertinência não-nulos em F.

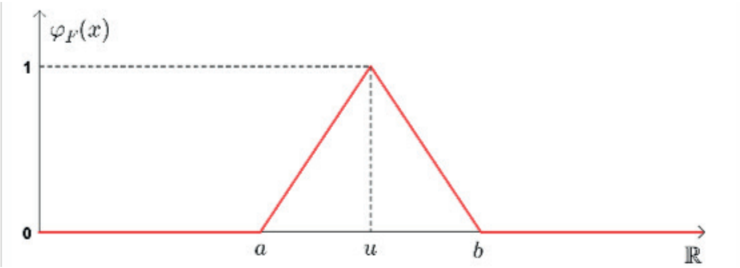
As funções de pertinência mais comuns são as triangulares, trapezoidais e as em forma de sino, que serão definidos a seguir:

Definição 2. Qualquer função de pertinência triangular pode ser caracterizada por três parâmetros: a, u e b, como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{u-a}, & se\ a < x \leq u \\ \dfrac{x-b}{u-b}, & se\ u < x \leq b \\ 0, & se\ x > b \end{cases}$$

O gráfico de $\varphi_F(x)$ é dado na Figura 1.

Figura 1. Função de pertinência triangular.



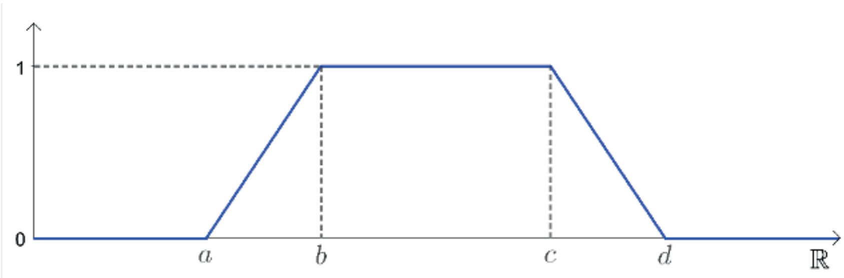
Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2010).

Definição 3. As funções de pertinência que apresentam o contorno trapezoidal podem ser caracterizadas por quatro parâmetros: a, b, c e d, como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & se\ a \leq x < b \\ 1, & se\ b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & se\ c < x \leq d \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}.$$

O gráfico de $\varphi_A(x)$ é dado na Figura 2.

Figura 2. Função de pertinência trapezoidal.



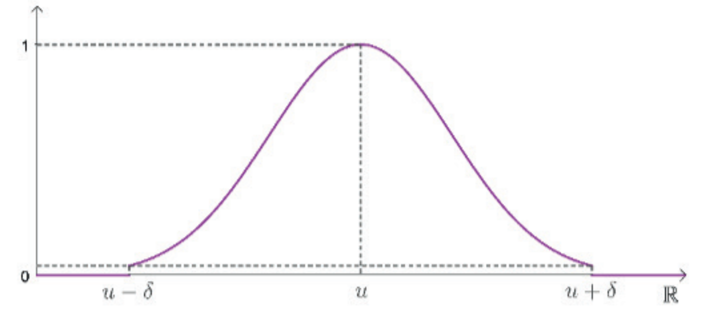
Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2010).

Definição 4. As funções de pertinência com o formato de sino podem ser expressas por três parâmetros dados: u, a e δ, como mostra a expressão geral:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right), & se\ u-\delta \le x \le u+\delta \\ 0, & caso\ contrário \end{cases},$$

e representada na Figura 3.

Figura 3. Função de pertinência em forma de sino.



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2010).

Operações com conjuntos fuzzy

Nessa seção serão estudadas as operações típicas de conjuntos como união, intersecção e complementação.

Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U, com funções de pertinência indicadas por φ_A e φ_B, respectivamente. É possível dizer que A é subconjunto fuzzy de B, notado por $A \subset B$, se $\varphi_A \le \varphi_B$ para todo elemento $x \in U$.

Por definição, a função de pertinência do conjunto vazio (∅) é dada por $\varphi_\emptyset(x) = 0$, como também, a função de pertinência do conjunto universo (U) é dada por $\varphi_U(x) = 1$, para todo elemento $x \in U$.

Definição 5. (União). A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U.$$

Definição 6. (Intersecção). A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

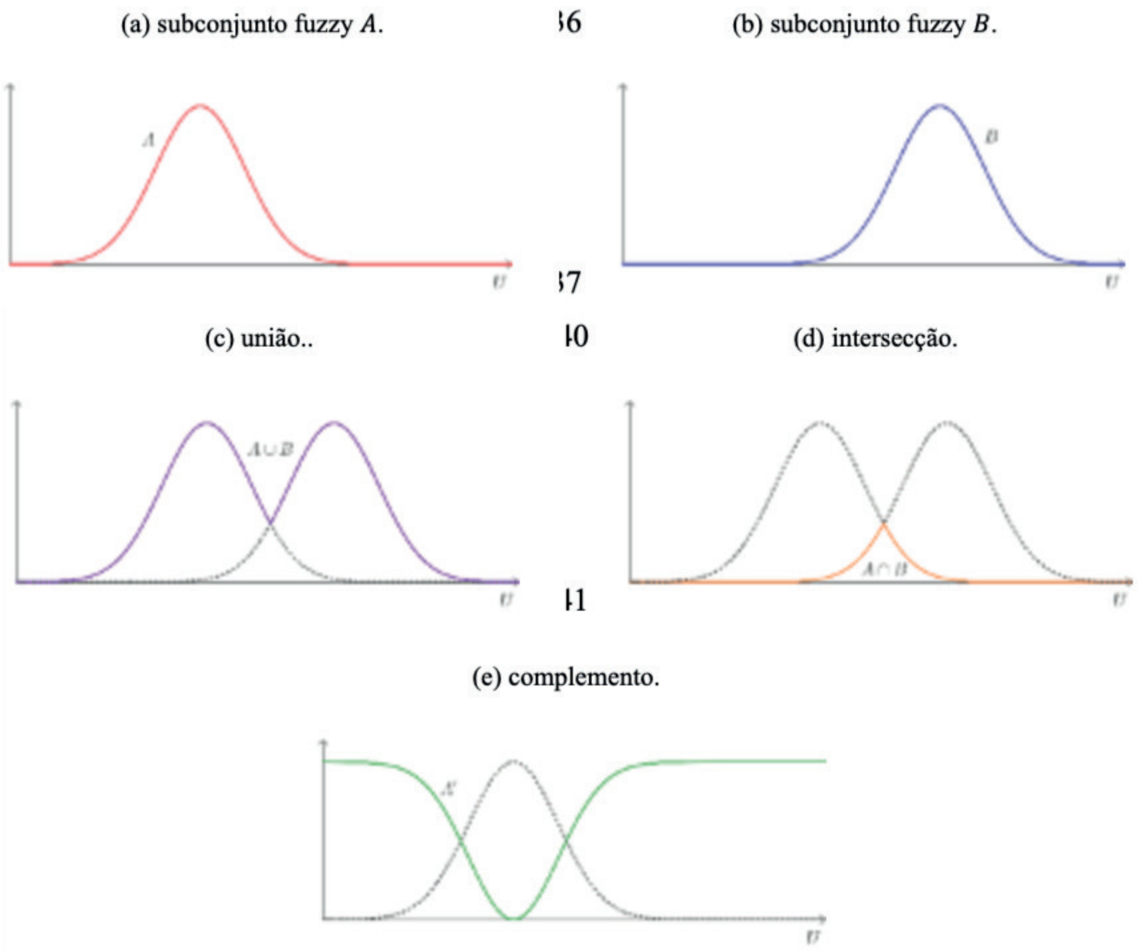
$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U.$$

Definição 7. (Complementar de subconjuntos fuzzy). O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), x \in U.$$

As operações com conjuntos estão representadas na Figura 4.

Figura 4. Operações com subconjuntos fuzzy.



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2010).

Operações t-norma e t-conorma

As normas e conormas triangulares são generalizações dos operadores união e intersecção. Serão definidas a seguir.

Definição 10. (t-norma). O operador $\triangle$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\triangle(x,y) = x \triangle y$, é uma *t-norma*, se satisfazer as seguintes condições:

I. elemento neutro: $\triangle(1,x) = 1 \triangle x = x$;
II. comutativa: $\triangle(x, y) = x \triangle y = y \triangle x = \triangle(y, x)$;
III. associativa: $x \triangle (y \triangle z) = (x \triangle y) \triangle z$;
IV. monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \triangle y \leq u \triangle v$.

A operação *t-norma* estende o operador $\wedge$ que modelo o conectivo "e".

Exemplo 11. São exemplos de *t-norma*:

Intersecção Padrão: $\triangle$: [0,1]×[0,1] → [0,1] com $x \triangle y = \min(x, y)$.

Produto Algébrico: $\triangle$: [0,1]×[0,1] → [0,1] com $x \triangle y = x.\ y$.

Diferença Limitada: $\triangle$: [0,1]×[0,1] → [0,1] com $x \triangle y = \max(0, x + y - 1)$.

Definição 12. (*t-conorma*). O operador $\triangledown$: [0,1] × [0,1] → [0,1], $\triangledown(x,y) = x \triangle y$, é uma *t-conorma*, se satisfazer as seguintes condições:

I. elemento neutro: $\triangledown(0, x) = 0 \triangledown x = x$;
II. comutativa: $\triangledown(x,y) = x \triangledown y = y \triangledown x = \triangledown(y, x)$;
III. associativa: $x \triangledown (y \triangledown z) = (x \triangledown y) \triangledown z$;
IV. monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \triangledown y \leq u \triangledown v$.

A operação *t-conorma* estende o operador ∨ que modelo o conectivo "ou".

Exemplo 13. São exemplos de *t-conorma*:

União Padrão: $\triangledown$: [0,1]×[0,1]→[0,1] com $x \triangledown y = \max(x, y)$.

Soma Algébrica: $\triangledown$: [0,1]×[0,1]→[0,1] com $x \triangledown y = x + y - xy$.

Soma Limitada: $\triangledown$: [0,1]×[0,1]→[0,1] com $x \triangledown y = \min(1, x + y)$.

Um elemento x do conjunto universo U está em uma classe se seu grau de pertinência é maior que um determinado valor limiar ou nível $\alpha \in [0,1]$ que define aquela classe. Este conjunto clássico é um α-nível de A, denotado por $[A]^\alpha$. O conceito de α-nível é uma maneira de identificar subconjuntos do conjunto universo por meio da restrição de seus graus de pertinência (NICOLETTI; CAMARGO, 2011).

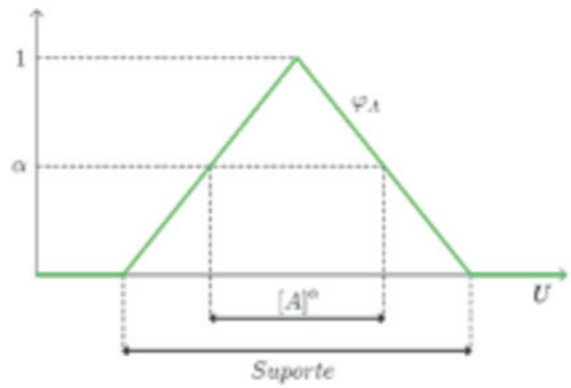
Definição 14. (α-nível). Seja A um subconjunto definido em um conjunto universo U e qualquer valor $\alpha \in [0,1]$. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U definido por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \cup : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Definição 15. Seja A um subconjunto definido em um conjunto universo U, o α-nível zero é definido como fecho do suporte de A, ou seja, $[A]^0 = \overline{\mathrm{supp}}(A)$.

Exemplo 16. O gráfico da Figura 5 representa o α-nível e o suporte de um conjunto fuzzy A expresso por uma função de pertinência φ_A.

Figura 5. Representação gráfica do α-nível e do suporte de um conjunto fuzzy A expresso por uma função de pertinência φ_B.



Fonte: Adaptado de Pissini (2019).

Teorema 17. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy do conjunto universo U. Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Demonstração. Tendo $A = B \Longrightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Suponhamos que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Se $A \neq B$, então existe $x \in$ U tal que $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$. Logo, temos que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ ou $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$. Supondo $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$, podemos concluir que $x \in [A]^{\varphi_B(x)}$ e $x \notin [B]^{\varphi_B(x)}$ e, portanto, $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_B(x)}$, o que contradiz a hipótese $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. De maneira análoga chegamos a uma contradição se admitirmos que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$.

De acordo com Barros e Bassanezi (2010), uma consequência deste teorema é a relação existente entre a função de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de seus α-níveis.

Definição 18. Um subconjunto fuzzy é dito normal se todos seus α-níveis forem não vazios, ou seja, se $[A]^1 \neq \emptyset$.

Vale ressaltar que o suporte do subconjunto fuzzy A é o conjunto clássico.

$$\operatorname{supp} A = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\},$$

podendo descrever A como equação a seguir:

$$A = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i\,,$$

quando o subconjunto fuzzy A tem suporte enumerável, e

$$A = \varphi_A(x_1)/x_1 + \varphi_A(x_2)/x_2 + \cdots + \varphi_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_A(x_i)/x_i\,,$$

se A tem suporte finito, ou seja, supp $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

É importante evidenciar que a notação $\varphi_A(x_i)/x_i$, não indica uma divisão, é apenas uma forma de visualizar o elemento x_i a seu respectivo grau de pertinência $\varphi_A(x_i)$. Além disso, símbolo "+" na notação não indica uma adição, também que o $\sum$ não significa um somatório. Isto é apenas uma forma de associar os elementos de U que estão em A com seus respectivos graus.

Exemplo 19. (BARROS; BASSANEZI, 2010). Seja A o subconjunto fuzzy dos reais representado por

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_A(x_i)/x_i = 0{,}1/1 + 0{,}2/2 + 0{,}25/3 + 0{,}7/5 + 0{,}9/8 + 1/10\,.$$

Para este exemplo, temos, por exemplo, que o 0,15-nível de A é

$$[A]^{0,15} = \{2, 3, 5, 8, 10\}.$$

Relações fuzzy

A seguir serão definidos os principais conceitos de Relações Fuzzy e Equações Relacionais Fuzzy. O conceito de relação fuzzy generaliza o conceito de relação crisp por meio da atribuição de um valor do intervalo [0,1] às associações entre elementos que fazem parte da relação (BARROS, BASSANEZI, 2010; NICOLETTI, CAMARGO, 2011; PISSINI, 2019; BELLUCCI, 2009; MARINS, 2016).

Definição 23. Uma relação fuzzy $\mathcal{R}$ sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy R é definida por uma função de pertinência $\varphi_R :_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \rightarrow [0,1]$.

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $U_1 \times U_2$.

Definição 24. O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, respectivamente, é a relação fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde $\wedge$ representa o mínimo.

Formas de representação das relações binárias

Sejam $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ e $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ e a relação fuzzy R definida em X×Y, com a função de pertinência dada por $\varphi_R(x_i,y_i)$=r_ij, para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. As representações de R podem ser na forma de tabela ou de matriz.

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

ou

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 25. Seja $\mathcal{R}$ uma relação fuzzy binária definida em $X \times Y$. A relação fuzzy binária inversa, $\mathcal{R}^{-1}$, definida em $Y \times X$, tem função de pertinência $\varphi_{R\text{-}1}: Y \times X \to [0,1]$ dada por $\varphi_{R\text{-}1}(y,x) = \varphi_R(x,y)$.

Composição entre relações fuzzy binárias

Definição 26. Considere R e S duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(x,z) = \underset{y \in V}{\triangledown} [\vartriangle(\varphi_{\mathcal{R}}(x,y), \varphi_{\mathcal{S}}(y,z))],$$

onde $\triangledown$ representa uma t-conorma e $\vartriangle$ representa uma t-norma.

Quando os conjuntos U, V e W são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$ pode ser obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto por uma t-norma e a soma por uma t-conorma.

Definição 27. Seja R uma relação fuzzy binária sobre U, cuja função de pertinência é φ_R. Então, para quaisquer x e y e z de U, a relação fuzzy R é

I. reflexiva se $\varphi_R(x,x) = 1$;
II. simétrica se $\varphi_R(x,y) = \varphi_R(y,x)$;
III. transitiva se $\varphi_R(x,z) \geq \varphi_R(x,y) \wedge \varphi_R(y,z)$, onde $\wedge$ = mínimo;
IV. antissimétrica se $\varphi_R(x,y) > 0$ e $\varphi_R(y,x) > 0$, implica que $x = y$.

A relação reflexiva é aquela em que todo indivíduo tem relação máxima consigo próprio; a simétrica é caracterizada pela reciprocidade, com mesma intensidade, entre seus indivíduos; a transitiva indica que a relação entre dois indivíduos quaisquer não deve ser, simultaneamente, inferior à relação de cada um destes dois com os demais e a relação antissimétrica é aquela que não admite qualquer reciprocidade entre indivíduos distintos (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Equações relacionais fuzzy

Considere os conjuntos universos finitos $U = \{u_1,u_2,\ldots,u_m\}, V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ e W=$\{w_1,w_2,\ldots,w_p\}$. As equações relacionais tratam de achar a forma matricial de uma relação fuzzy binária, a partir de duas outras conhecidas. As equações relacionais fuzzy de interesse aqui têm a forma

$$\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T} \quad \text{ou} \quad \mathcal{X} * \mathcal{R} = \mathcal{T},$$

onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ são as formas matriciais das relações fuzzy binárias dadas, "*" uma composição entre relações fuzzy e X a forma matricial de uma relação fuzzy incógnita a ser encontrada.

Assim, por exemplo, resolver a equação $\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T}$ significa encontrar a forma matricial de uma relação fuzzy binária X, em $V \times W$ supondo conhecidas as formas matriciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ em $U \times V$ e $U \times W$, respectivamente.

Considerando que "*" seja a composição [max,prod], a equação será dada por

$$\mathcal{R} * \mathcal{X} = \mathcal{T} \tag{1}$$

Supondo que os universos envolvidos sejam finitos, de modo que as relações fuzzy tenham representações matriciais

$$\mathcal{R} = [r_{ij}], \quad \mathcal{X} = [x_{jk}] \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = [t_{ik}],$$

onde $r_{ij} = \varphi_{\mathcal{R}}(u_i, v_j), x_{jk} = \varphi_{\mathcal{X}}(v_j, w_k)$ e $t_{ik} = \varphi_{\mathcal{T}}(u_i, w_k)$.

Como a composição em questão é a [max,prod], resolver (1) significa encontrar $x_{jk} \in [0,1]$ tais que

$$\max_{1 \leq j < n} [\operatorname{prod}(r_{ij}, x_{jk})] = t_{ik},$$

para cada $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq p$.

Um modelo matemático

De acordo com Forner e Trevisol (2012), o acompanhamento de cada aluno durante o processo, respeitando sua subjetividade, contextualizando a aprendizagem e reconhecendo a diversidade dos aprendizes, é fundamental para uma avaliação escolar adequada. A partir dessas perspectivas, a ideia é relacionar diferentes instrumentos de avaliação (provas, atividades, participação em aula, etc.) com determinadas menções (insuficiente, regular e bom), de acordo com os conhecimentos de uma professora especialista, no nosso caso, professores de educação básica. Estes dados irão compor a base de conhecimento que serão expressos por meio de relações fuzzy. Assim, utilizando equações relacionais fuzzy para propor um modelo de avaliação, será possível obter o desempenho do discente com seus respectivos graus para cada menção. Esta aplicação pode ser resumida no sistema de entradas e saídas:

Entrada		*Base de*		*Saída*
(Instrumentos de avaliação)	→	*Conhecimento*	→	(Menções)

Considere os seguintes conjuntos universais: U = conjunto dos alunos; V = conjunto dos instrumentos de avaliação; e W = conjunto das menções. Tem-se conhecimento de cinco alunos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, com os instrumentos de avaliação p_1, p_2, p_3 e p_4, apresentam as menções m_1, m_2 e m_3, onde:

p_1 = participação; p_2 = prova semanal; p_3 = atividades; p_4 = prova bimestral.

m_1 = insuficiente; m_2 = regular; m_3 = bom.

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que será expressa por meio de equações relacionais fuzzy. Com o auxílio de uma professora especialista, foi solicitado que estabelecesse o grau da relação $\mathcal{R}$, Tabela 1, onde as colunas representam as menções consideradas, as linhas são os instrumentos de avaliação, e os valores da matriz são os graus, no intervalo [0,1], com que os instrumentos de avaliação se relacionam com as menções. Por exemplo, o valor r_{32} = 0,2, indica numa escala entre 0 e 1, o instrumento de avaliação p_3, prova semanal, está relacionado com a menção m_2, bom, com grau de pertinência 0,2.

Tabela 1. Relação fuzzy instrumentos de avaliação × menções ($\mathcal{R}$).

$p\backslash m$	m_1	m_2	m_3
p_1	0,0	0,0	0,0
p_2	0,0	0,1	0,1
p_3	0,0	0,2	0,1
p_4	0,0	0,1	0,2

Fonte: Autoria própria.

É possível notar que a primeira linha está com elementos nulos, isso ocorre pois o instrumento de avaliação p_1, participação, será considerado o instrumento com menor importância para determinação do desempenho do aluno. O mesmo ocorre para a primeira coluna, neste caso, pelo motivo de que a menção m_1, insuficiente, será descartada no cálculo de equações relacionais fuzzy. Além disso, simulou-se as notas em cada instrumento de avaliação de cinco alunos, no intervalo de [0,1], representada pela Tabela 2. Assim, obtém-se a relação fuzzy $\mathcal{S}$, na qual indica os graus de desempenho do aluno relativo aos instrumentos de avaliação.

Tabela 2. Relação fuzzy alunos × instrumentos de avaliação ($\mathcal{S}$).

$A \backslash p$	p_1	p_2	p_3	p_4
A_1	1,0	0,8	0,8	0,9
A_2	0,8	1,0	0,9	0,2
A_3	0,6	0,6	0,7	0,7
A_4	0,5	0,5	1,0	0,5
A_5	0,1	0,2	0,4	0,5

Fonte: Autoria própria.

Em sua rotina escolar a professora utilizou os seguintes pesos: 0,1 para participação; 0,2 para prova semanal; 0,3 para atividades; e 0,4 para prova bimestral. Com esses pesos é calculada a nota final de cada aluno. É importante destacar que para um aluno ser aprovado na disciplina é necessário que obter uma nota igual ou superior a 6, caso o contrário, ele será reprovado, assim resultando em um desempenho insuficiente. A nota final (NF) de cada aluno é representada pela Tabela 3.

Tabela 3. Nota final de cada aluno.

$NF \backslash A$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_4
NF	8,6	6,3	6,7	6,5	3,7

Fonte: Autoria própria.

Assim, o propósito é obter uma relação $\mathcal{T}$, na forma matricial da tabela alunos × menções (U × W), da forma $\mathcal{S} \bullet \mathcal{R} = \mathcal{T}$, sendo $\mathcal{S}$ a forma matricial da tabela alunos × instrumentos de avaliação ($U \times V$), $\mathcal{R}$ a forma matricial da tabela instrumentos de avaliação × menções ($V \times W$), "•" uma composição [max,prod] entre relações fuzzy.

A partir da relação fuzzy $\mathcal{T}$ será possível obter o desempenho do discente com seus respectivos graus para cada menção, ou seja,

$$t_{ik} = \max_{1 \leq j \leq 4} \left[\text{prod}\left(s_{ij}, r_{jk}\right)\right]$$

com $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq k \leq 3$. Assim, obtendo a forma matricial da relação $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{S} \bullet \mathcal{R} = \mathcal{T} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}6 & 2{,}4 & 3{,}6 \\ 0{,}8 & 2{,}0 & 2{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 1{,}2 & 2{,}1 & 2{,}8 \\ 0{,}5 & 1{,}0 & 3{,}0 & 2{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 1{,}2 & 2{,}0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} \end{bmatrix}$$

RESULTADOS

O desempenho do aluno A_1 pode ser facilmente obtido através dos cálculos de t_{ik}, com i = 1 e k = 1,2,3 da matriz $\mathcal{T}$. Logo, o aluno A_1 pode desempenhar uma das menções m_i, com i = 1,2,3, com os respectivos graus de pertinência:

t_{11} = max[prod{1,0;0,0};prod{1,6;0,0};prod{2,4;0,0};prod{3,6;0,0}]
= max[0,00;0,00;0,00;0,00]=0,00.
t_{12} = max[prod{1,0;0,0};prod{1,6;0,1};prod{2,4;0,2};prod{3,6;0,1}]
=max[0,00;0,16;0,48;0,36]=0,48.
t_{13} = max[prod{1,0;0,0};prod{1,6;0,1};prod{2,4;0,1};prod{3,6;0,2}]
=max[0,00;0,16;0,24;0,72]=0,72.

Analogamente, o aluno A_2 pode desempenhar uma das menções m_i, com i = 1,2,3, com os respectivos graus de pertinência:

t_{21} = max[prod{0,8;0,0};prod{2,0;0,0};prod{2,7;0,0};prod{0,8;0,0}]
= max[0,00;0,00;0,00;0,00]=0,00.
t_{22} = max[prod{0,8;0,0};prod{2,0;0,1};prod{2,7;0,2};prod{0,8;0,1}]
= max[0,00;0,20;0,54;0,08]=0,54.
t_{23} = max[prod{0,8;0,0};prod{2,0;0,1};prod{2,7;0,1};prod{0,8;0,2}]
=max[0,00;0,20;0,27;0,16]=0,27.

O aluno A_3 pode desempenhar uma das menções m_i, com i = 1,2,3, com os respectivos graus de pertinência:

t_{31} = max[prod{0,6;0,0};prod{1,2;0,0};prod{2,1;0,0};prod{2,8;0,0}]
= max[0,00;0,00;0,00;0,00]=0,00.
t_{32} = max[prod{0,6;0,0};prod{1,2;0,1};prod{2,1;0,2};prod{2,8;0,1}]
= max[0,00;0,12;0,42;0,28]=0,42.
t_{33} = max[prod{0,6;0,0};prod{1,2;0,1};prod{2,1;0,1};prod{2,8;0,2}]
= max[0,00;0,12;0,21;0,56]=0,56.

O aluno A_4 pode desempenhar uma das menções m_i, com i = 1,2,3, com os respectivos graus de pertinência:

t_{41} = max[prod{0,5;0,0};prod{1,0;0,0};prod{3,0;0,0};prod{2,0;0,0}]
= max[0,00;0,00;0,00;0,00]=0,00.
t_{42} = max[prod{0,5;0,0};prod{1,0;0,1};prod{3,0;0,2};prod{2,0;0,1}]
= max[0,00;0,10;0,60;0,20]=0,60.
t_{43} = max[prod{0,5;0,0};prod{1,0;0,1};prod{3,0;0,1};prod{2,0;0,2}]
= max[0,00;0,10;0,30;0,40]=0,40.

E, baseando-se na Tabela 3, como o aluno A_5 tem a média ponderada abaixo de 6, nota mínima para aprovação do aluno, consideremos que este é um aluno com desempenho insuficiente, assim determinaremos que

$$t_{51} = 1{,}00. \qquad t_{52} = 0{,}00. \qquad t_{53} = 0{,}00.$$

Deste modo, obtém-se os possíveis desempenhos de todos os alunos. Com os dados obtidos é possível determinar a forma matricial e tabular da relação $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0{,}00 & 0{,}48 & 0{,}72 \\ 0{,}00 & 0{,}54 & 0{,}27 \\ 0{,}00 & 0{,}42 & 0{,}56 \\ 0{,}00 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Tabela 4. Relação fuzzy alunos × menções ($\mathcal{T}$).

$A\backslash m$	m_1	m_2	m_3
A_1	0,00	0,48	0,72
A_2	0,00	0,54	0,27
A_3	0,00	0,42	0,56
A_4	0,00	0,60	0,40
A_5	1,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria.

Logo, foi possível encontrar a relação fuzzy $\mathcal{T}$ (alunos × menções), retratado na Tabela 4, onde as linhas representam os alunos, as colunas representam as menções, e os valores da matriz são os graus de pertinência com que as menções se relacionam com cada aluno.

DISCUSSÃO

Sendo assim, nota-se que a possibilidade do aluno A_1 ter um desempenho regular (m_2) e bom (m_3) é de 0,48 e 0,72, respectivamente. Os alunos A_2 e A_4 podem ter um desempenho regular, pois o grau para m_2 é maior do que as outras menções, sendo 0,54 e 0,60, respectivamente. Para o aluno A_3 é possível que tenha um desempenho bom, com grau de pertinência de 0,56. Como o aluno A_5 não atingiu a nota mínima de aprovação, recebeu grau de pertinência 1,00 para a menção insuficiente (m_1). Ao analisar os dados dos alunos A_2, A_3 e A_4 na Tabela 3, nota-se que as notas finais são bastante próximas, porém, ao fazer a mesma comparação na Tabela 4, nota-se que os graus de pertinência dos três alunos citados diferem um com o outro. Isso ocorre pois quando a especialista define sua base de conhecimento (Tabela 1), determina-se quais instrumentos de avaliação são mais importantes no seu processo de avaliação.

Além do modelo matemático proposto, foi desenvolvido um programa computacional para simulação, via linguagem Python. O programa realiza a leitura dos dados inseridos em uma planilha eletrônica (os nomes dos alunos com as suas respectivas notas; os pesos de cada instrumentos de avaliação; e a base de conhecimento), e em seguida, processa estes dados, retornando o grau de pertinência de cada aluno para cada menção estabelecida. O código deste programa, juntamente com a simulação do exemplo anterior, pode ser encontrado em SILVA (2023).

CONCLUSÃO

Este trabalho iniciou-se com o estudo dos conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Posteriormente, estudou-se conceitos de Relação Fuzzy e Equação Relacional Fuzzy. Assim, propõe-se uma aplicação por meio de um modelo matemático para auxiliar no processo de avaliar, podendo assim determinar o desempenho do aluno através do grau em três menções diferentes: insuficiente, regular ou bom. O intuito foi relacionar as notas do discente com os instrumentos de avaliação, com o auxílio de uma especialista, e utilizar equações relacionais fuzzy para propor o modelo de desempenho dos alunos.

As equações relacionais fuzzy tratam de achar a forma matricial de uma relação binária, a partir de duas outras conhecidas. Assim, a partir do cálculo de equações relacionais fuzzy foi possível obter o desempenho de cada aluno com os respectivos graus de pertinência das menções. Dessa maneira, este modelo pretende ser uma ferramenta para auxiliar o professor na tarefa de avaliação das aprendizagens discentes.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece a Coordenadoria dos Programas de Iniciação Científica e Tecnológica (CoPICT) da Pró-Reitoria de Pesquisa da UFSCar. A terceira autora agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), projeto número 2020/010658-3, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. IMECC--UNICAMP, Campinas/SP. 2010.

BELUCCI, D. P. *Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e Aplicações*. Dissertação de Mestrado. UFABC - Santo André, 2009.

FORNER, D. S. G.; TREVISOL, M. T. C. *Significados e funções da avaliação da aprendizagem escolar*, Roteiro, 37, n. 2, 243-264, 2012.

JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações.* Notas em Matemática Aplicada. São Carlos/SP: SBMAC. 2012.

MARINS, L. R. *Diagnóstico médico por meio de relações fuzzy*: dengue, chikungunya ou zica. Dissertação de Mestrado. CCET-UFSCar, 2016.

NICOLETTI, M. C.; CAMARGO, H. A. *Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy*. Série Apontamentos. São Carlos: EdUFSCar, 2011.

PISSINI, M. M. *Um estudo fuzzy para propor um modelo matemático como auxílio ao diagnóstico médico das faringotonsilites*. Dissertação de Mestrado. UFSCar - Sorocaba, 2019.

SILVA, A. L. *Um estudo sobre sistemas baseados em regras fuzzy*. Dissertação de Mestrado. UFSCar - Sorocaba, 2020.

SILVA, G. C. T. *Uma abordagem fuzzy para o desempenho escolar no processo ensino--aprendizagem*. Trabalho de Conclusão de Curso. UFSCar – Sorocaba, 2023.

SILVA, G. C. T.; LUNETTA, C.; PEIXOTO, M. S. *Uma abordagem fuzzy para avaliação formativa no processo ensino-aprendizagem*. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC) – Campinas, 2022.

ZADEH, L. A. *Fuzzy sets. Information and Control*, 8:338-353, 1965.