BATISTA, Éverton Ferraz Marcelino; OLIVEIRA, Paulo Cesar. **Identificação de elementos do pensamento algébrico em uma atividade de treinamento para olimpíada matemática.** *In*: **A Formação e o Trabalho do Professor-Pesquisador em Educação Matemática.** VIZOLLI, Idemar Vizolli; COSTA, Dailson Evangelista; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de (orgs.). Confresa: Gnosis Carajás, 2024, pp.645-655. Disponível em: https://ojs.sbemto.org/index.php/iiietem/issue/view/4 .

IDENTIFICAÇÃO DE ELEMENTOS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM UMA ATIVIDADE DE TREINAMENTO PARA OLIMPÍADA MATEMÁTICA

IDENTIFICATION OF ELEMENTS OF ALGEBRAICAL THINKING IN A TRAINING ACTIVITY FOR MATHEMATICAL OLYMPICS

IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN UNA ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO PARA OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS

Eixo 7 - Formação de Professores que Ensinam Matemática

Éverton Ferraz Marcelino Batista *
https://orcid.org/0009-0006-6586-4223
https://lattes.cnpq.br/6531607468097978

Paulo Cesar Oliveira **
https://orcid.org/0000-0003-2514-904X
http://lattes.cnpq.br/7516513469

RESUMO

O presente relato de experiência consiste na apresentação de um projeto que teve como objetivo inicial treinar alunos do 7º e 8º ano, dos Anos Finais, para a segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. A dinâmica se deu na resolução de questões de anos anteriores da prova, organizadas pelo professor por suas similaridades. Dentro deste contexto, o professor destacou algumas questões que trazem números inusitados, como *número-parada*, por exemplo, e propôs que os alunos criassem seus próprios números e que investigassem características inerentes aos números criados, resultando assim em duas criações: os números *jáera* e *sapeca*. Utilizando metodologia qualitativa na modalidade Estudo de Caso, esta pesquisa faz a análise e identificação de elementos do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005) a partir das interações registradas no desenvolvimento da atividade, na qual foi possível identificar uma diversidade de elementos do Pensamento Algébrico.

* Mestre em Ensino de Ciências Exatas na Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR). Doutorando em Educação na Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), Sorocaba, São Paulo, Brasil. E-mail: evertonbatista@estudante.ufscar.br
**Doutor em Educação Matemática na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor associado na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, São Paulo, Brasil. E-mail: paulooliveira@ufscar.br.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. OBMEP. Criatividade.

ABSTRACT

This experience report consists of the presentation of a project whose initial objective was to train students from the 7th and 8th years, in the Final Years, for the second phase of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools. The dynamics took place in solving questions from previous years of the test, organized by the teacher based on their similarities. Within this context, the teacher highlighted some issues that bring up unusual numbers, such as stop numbers, for example, and proposed that students create their own numbers and investigate characteristics inherent to the numbers created, thus resulting in two creations: the numbers Jáera and sapeca. Using qualitative methodology in the Case Study modality, this research analyzes and identifies elements of Algebraic Thinking by Blanton and Kaput (2005) based on interactions recorded during the development of the activity, in which it was possible to identify a diversity of elements of Algebraic Thinking .
Keywords: Algebraic Thinking. OBMEP. Creativity.

RESUMEN

Este relato de experiencia consiste en la presentación de un proyecto cuyo objetivo inicial fue formar estudiantes de 7º y 8º año, en los últimos años, para la segunda fase de la Olimpiada Brasileña de Matemática para las Escuelas Públicas. La dinámica se desarrolló en la resolución de preguntas de años anteriores de la prueba, organizadas por el docente en función de sus similitudes. En ese contexto, la docente destacó algunas cuestiones que plantean números inusuales, como los números stop, por ejemplo, y propuso a los estudiantes crear sus propios números e investigar características inherentes a los números creados, dando como resultado dos creaciones: los números jáera y sapeca. Utilizando metodología cualitativa en la modalidad de Estudio de Caso, esta investigación analiza e identifica elementos del Pensamiento Algebraico de Blanton y Kaput (2005) con base en interacciones registradas durante el desarrollo de la actividad, en la que fue posible identificar una diversidad de elementos del Pensamiento Algebraico.
Palabras clave: Pensamiento Algebraico. OBMEP. Creatividad.

1 INTRODUÇÃO

Este texto tem como objetivo compartilhar a implementação de uma abordagem pedagógica que buscou preparar os alunos do primeiro autor deste trabalho para a segunda fase da OBMEP. O curso foi realizado de forma remota, no ano de 2022, na escola municipal Matheus Maylasky, localizada em Sorocaba-SP.

A motivação para a elaboração e implementação do projeto se deu a partir do interesse dos alunos em obter conhecimentos específicos para a realização da segunda fase da OBMEP. A partir disto, o docente se propôs a ministrar aulas extras, no contraturno escolar, para ampliar os conhecimentos prévios dos discentes e familiarizá-los com os modelos das provas anteriores.

Durante o desenvolvimento do curso, foi elaborada uma proposta complementar que visava promover um senso de protagonismo entre os alunos nesse processo de aprendizagem. Nessa atividade adicional, os estudantes foram desafiados a criar seus próprios números, seguindo critérios específicos, e, em seguida, explorar suas propriedades através de perguntas direcionadas do professor.

Este relato de experiência já foi analisado com base nas categorias do Letramento

Matemático no trabalho de Batista e Oliveira (2023), os quais emergiram resultados que motivaram uma ampliação da análise para o âmbito do Pensamento Algébrico. Desta forma, este relato de experiência objetiva responder a seguinte pergunta: qual (is) elemento (s) do Pensamento Algébrico é (são) possível (eis) identificar numa tarefa em que privilegie a criatividade do aluno ao ser motivado a criar seu próprio número e a investigação, pelo próprio aluno, do alcance de sua produção?

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

O termo Pensamento Algébrico é relativamente novo nos compêndios da Educação Matemática. Conforme Blanton e Kaput (2005) assevera, ele nasce como um combate à forma estritamente letrista, com transformismos algébricos que a álgebra foi ensinada por muito tempo. Muitos autores enxergam esse conceito de diferentes formas, havendo convergências e divergências entre as determinadas abordagens.

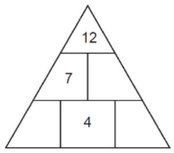
Blanton e Kaput (2005) realizaram uma exaustiva análise de registros gerados por uma professora ao longo de um ano, bem como das produções de seus alunos, categorizando essas vivências com elementos pertencentes ao Pensamento Algébrico, seja de forma espontânea, seja de forma planejada pela professora. Os autores enxergam o Pensamento Algébrico como um processo de generalização de ideias matemáticas, aumentando o grau de formalização da representação de acordo com sua idade. Indo mais além, elencam dois aspectos centrais do Pensamento Algébrico: a generalização gradual e o raciocínio e ação sintática. Destes dois aspectos centrais, os autores levantam três vertentes características do pensamento algébrico, bem como seus elementos constituintes, organizadas como categorias e seus respectivos códigos. Uma das vertentes é a Aritmética Generalizada, que em sua pesquisa são:

> Instâncias em que a aritmética foi usada como um domínio para expressar e formalizar generalizações foram codificadas como categorias de A até E. Tomamos essas instâncias amplamente para incluir processos aritméticos que envolviam quantidades generalizadas, não necessariamente aqueles processos que tinham generalização como resultado final. Isso incluiu instâncias em que os alunos estavam envolvidos em operações com números inteiros em formas abstratas (por exemplo, sentenças numéricas ausentes) ou usavam números de forma generalizada. (Blanton e Kaput, 2005, p. 419, tradução nossa).

Esta vertente e suas categorias constituintes encontram-se organizados no quadro 1:

Quadro 1 - Categorias constituintes da Aritmética Generalizada

Código e Descrição da Categoria	Exemplo Resumido
A - Explorar propriedades e relações de números inteiros	Conceber o elemento oposto numa soma de inteiros como consequência de gerar o elemento nulo
B - Explorando propriedades de operações em números inteiros	Comutatividade A + B = B + A
C - Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades	Sentenças como: 7 + 8 = ___+ 3

D - Tratar o número algebricamente	O aluno saber se o resultado de 34099+12981110 é par ou ímpar sem calcular o resultado da adição
E - Resolver expressões numéricas com números desconhecidos	Sabendo que cada número é obtido pela soma dos dois blocos que o sustenta, identifique os números dos blocos em branco: 

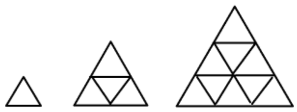
Fonte: Elaboração própria a partir de Blanton e Kaput (2005)

Outra vertente é o Pensamento Funcional, o qual foi utilizado como:

> As categorias F–J foram codificadas como instâncias em que os alunos estavam envolvidos na generalização de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais. Isso levou a incluir processos associados, como simbolizar quantidades ou fazer previsões sobre os dados [...] (Blanton e Kaput, 2005, p. 423, tradução nossa).

Esta vertente e suas categorias constituintes encontram-se organizados no quadro 2:

Quadro 2: Categorias constituintes do Pensamento Funcional

Código e Descrição da Categoria	Exemplo Resumido
F - Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas	Uso de P para representar um número par qualquer
G - Representar dados em gráficos	Plotar pares ordenados no plano cartesiano. As representações gráficas estatísticas não são contempladas nesta categoria
H - Encontrar relações funcionais	Estudar a relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos 
I - Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos	Prever a quantidade de diagonais em um polígono convexo com 100 lados analisando os casos com menos lados
J - Identificar e prever padrões numéricos e geométricos	Análise em números figurados

Fonte: Elaboração própria a partir de Blanton e Kaput (2005)

Uma última vertente, denominada Mais Sobre Generalização e Justificação (quadro 3), atua como uma instância mais avançada do Pensamento Algébrico, que para os autores:

> Nas Categorias K–M, identificamos instâncias de raciocínio algébrico que não eram específicas para as formas delineadas na definição de raciocínio algébrico fornecida anteriormente. Ou seja, elas representavam atos de generalização abstraídos de um conteúdo matemático particular ou processos que vemos como centrais para que o raciocínio algébrico viável ocorra. Conjecturamos que essas categorias refletem a capacidade mais evoluída dos alunos de raciocinar algebricamente e, por causa de sua complexidade, poderiam indicar que o raciocínio algébrico estava se tornando um hábito mental para os alunos. (Blanton e Kaput, 2005, p. 427, tradução nossa).

Desta forma, os autores asseveram que esta vertente é a menos comum em crianças dos Anos Iniciais da Educação Básica, sendo as outras primeiras como indicação de foco para se trabalhar neste segmento.

Quadro 3: Categorias constituintes do Mais Sobre Generalização e Justificação

Código e Descrição da Categoria	Exemplo resumido
K- Usar generalizações para resolver tarefas algébricas	A generalização de um número ímpar qualquer na obtenção do resultado de que ímpar + ímpar = par
L- Justificação, prova e teste de conjecturas	$2^0 = 1$, obtendo-o da divisão sucessiva das potências de 2 por 2, sempre reduzindo seu expoente até justificar o caso de expoente zero
M - Generalizar um processo matemático	A partir da adição de frações usando frações equivalentes, generalizar o método para quaisquer frações

Fonte: Elaboração própria a partir de Blanton e Kaput (2005)

Outras definições do Pensamento Algébrico mostram-se diversificadas e importantes na literatura acadêmica, sendo uma delas a de Almeida e Santos (2017) em que a concebem como articulações entre cinco características: a capacidade de estabelecer relações, capacidade de modelar, capacidade de generalizar, capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido e a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica. Os autores constroem esse modelo com base nas estratégias de resolução adotadas pelos alunos e, assim, definem diferentes níveis de desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

O modelo de Almeida e Santos (2017) mostra-se importante para a mensuração do nível de Pensamento Algébrico de um aluno ou professor, por exemplo, no entanto como o escopo deste trabalho é identificar elementos e não níveis do Pensamento Algébrico, optou-se por utilizar a conceituação de Blanton e Kaput (2005) que em sua ampla tessitura de categorias bem delimitadas favorece a identificação em situações como as vivenciadas neste relato.

Outro conceito em que este projeto se pautou foi o de criatividade em Matemática. O desenvolvimento da criatividade está relacionado com uma capacidade inventiva de solucionar problemas, trazendo soluções que podem ir desde o âmbito pessoal do aluno até mesmo ao de cunho social e que, para efetivar este desenvolvimento numa aula de Matemática, deve-se privilegiar problemas abertos ao invés dos fechados (Gontijo *et al*, 2020). Sobre a definição de criatividade em Matemática, Gontijo (2007) assevera que:

> [...] não existe um conceito preciso para criatividade em Matemática, apesar da presença de aspectos comuns nas definições apresentadas. Desta forma, tomando algumas características presentes nas definições citadas e outras relativas à criatividade, consideraremos, neste trabalho, a criatividade em Matemática como a capacidade de apresentar diversas possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns. Esta capacidade pode ser empregada tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades

> e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações. (Gontijo, 2007, p. 37)

Desta maneira, entende-se que a criação e exploração de propriedades de números particulares por parte dos alunos está calcado conceitualmente numa dinâmica de criatividade em Matemática.

A seguir o relato da experiência será pormenorizado e categorizado de acordo com a conceituação do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005) e, também, situar-se-á os momentos no que diz respeito à criatividade em Matemática.

3 RELATO DA PRÁTICA EDUCATIVA VIVENCIADA

Na escola onde o projeto foi implementado não havia registros de iniciativas voltadas para o treinamento para a OBMEP, sendo que os alunos que passavam para a segunda fase manifestavam interesse em obter um melhor preparo, o que motivou o primeiro autor deste trabalho, professor destes alunos nesse tempo relatado (2022), a pôr em prática esse treinamento.

O projeto foi composto por encontros realizados no contraturno escolar e de maneira remota, por meio de videoconferências, totalizando 8 encontros de 100 minutos cada. Essa abordagem foi adotada porque a execução do projeto na escola demandaria a oferta de alimentação aos alunos, algo que a instituição não conseguiria oferecer, além de permitir uma maior adesão ao curso. A participação foi inicialmente determinada pelo critério de ter avançado para a segunda fase da OBMEP, mas outros alunos, mesmo aqueles que não haviam passado, expressaram interesse em se preparar para a prova de 2023. Assim, o segundo critério se tornou a manifestação de interesse genuíno na preparação para a próxima edição da prova.

Com esses critérios, 20 alunos (7 meninos e 13 meninas), representando cerca de 16% do total de alunos das turmas do professor, participaram das aulas, com idades entre 12 e 13 anos. Em termos metodológicos, a pesquisa é caracterizada como qualitativa, na forma de um Estudo de Caso.

As aulas ocorreram na dinâmica de resolução guiada de questões de anos anteriores da segunda fase da OBMEP, sendo que previamente o professor elaborou uma apostila que agrupava questões de acordo com algumas de suas características marcantes, sendo uma delas a de enunciados que definem números específicos, como *supernúmero*, *número-parada* e outros termos menos conhecidos. O professor expressou aos alunos a opinião de que esses números refletem a criatividade dos elaboradores das questões da prova, desconhecendo qualquer literatura que mencionasse sua utilização anterior. A partir dessa observação, o professor propôs um desafio: os alunos deveriam criar seus próprios números, inspirados nas definições não usuais da OBMEP, estabelecendo regras que considerassem pertinentes e, em seguida, explorar as possíveis características e propriedades desses números. A análise do Pensamento Algébrico apresentada neste relato de experiência se concentra nesse momento da sequência didática, pois o professor notou respostas criativas e bem elaboradas dos alunos.

4 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Dois alunos foram capazes de apresentar aos demais colegas seus próprios números: o número *jáera* e o número *sapeca*, sendo esses alunos chamados, respectivamente aos números mencionados, por A1 (12 anos) e A2 (13 anos).

No presente artigo, a análise se restringe apenas ao relato da produção de A1, ou seja, será discutido o número intitulado como *jáera*, sendo que o recorte que será mencionado e analisado teve duração de dois encontros de 100 minutos cada.

As situações descritas na sequência são identificadas como categorias do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005), como descrito anteriormente.

4.1 Definição do número jáera

A1 ao exemplificar para o grupo o que seria um número *jáera*, ressaltou que se trata de um número associado a outro número natural, sendo esse outro número o seu originário (ou inicial). Sendo assim, o *jáera* é um número que pressupõe uma associação, uma relação com um outro número que lhe dá origem. O aluno explica aos demais que não é qualquer número originário que pode ter um *jáera* associado, ou seja, deve-se cumprir um primeiro requisito: o algarismo das unidades deve ser ímpar.

A partir desta primeira condição de existência, A1 prossegue exemplificando que há um procedimento, um algoritmo, para que se possa encontrar o *jáera* associado a este número original, e para fazer-se entender, criou um exemplo de número originário e demonstrou quais os procedimentos (iterações) que devem ser realizadas.

O número natural 12893 tomado como originário, devem ser feitas iterações sobre ele para encontrar seu *jáera* associado, sendo que a primeira iteração a ser realizada é a de multiplicar a unidade ímpar (no exemplo o 3) pelo algarismo par da posição mais próxima à esquerda, no caso é o 8, ficando: 3x8 = 24. O próximo passo remete a fazer o *deslocamento* do produto 24 para logo após à última posição à esquerda do número, ou seja, logo após ao algarismo 1 da dezena de milhar, e daí retira-se os dois algarismos que foram multiplicados, ficando: 24129. Nesse momento, deve-se observar a unidade: é ímpar? Se sim, repita todas as iterações. É par? Esse número resultante é o *jáera* do número originário. Como a unidade ainda é ímpar, repete-se cada passo: multiplica-se 9 pelo par mais próximo à esquerda (2): 9x2 = 18 e inclui-se o produto no número, excluindo os algarismos 2 e 9, ficando: 18241, com unidade ímpar ainda. Repetindo as iterações: 1x4 = 4, temos: 4182, com unidade par. Assim, pela definição do aluno, 4182 é o *jáera* do 12893.

Nesse momento em que o aluno define o número pode-se identificar a categoria D (Tratar o número algebricamente) quando manipula os algarismos de forma não convencional e, também, a categoria M (generalizar um processo matemático), pois construiu um algoritmo bem definido para determinar o *járea* de um número que atenda às condições de existência.

É possível notar, também, uma caracterização de uma vivência criativa em Matemática, nos moldes de Gontijo (2007), pois há uma inovação em que há associações, organização e delimitação de sequência de ações.

Os momentos a seguir, relatados no subtópico 4.2, foram vivenciados apenas pelo professor e o A1, sendo que o momento coletivo se restringiu apenas à esta apresentação com os demais alunos, relatada neste subtópico (4.1).

4.2 Exploração de propriedades dos números jáeras

Após esse momento de explicação da definição do número, o professor faz provocações ao aluno, induzindo-o a explorar as propriedades dos *jáeras*:

> *Professor: É possível dizer que o número jáera de um outro número é sempre divisível por um número natural n?*
> *A1: é sempre divisível por 2, pois todo jáera é par.*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

Aqui pode-se notar a relação que o aluno faz com a propriedade de paridade de um número com uma propriedade intrínseca de um *jáera*, ou seja, ele faz relações que permitem inferir uma outra propriedade do *jáera*, configurando a categoria A (Explorar propriedades e relações de números inteiros). O professor prossegue com as provocações:

> *Professor: Imagine um número inicial em que os algarismos são todos pares, menos o da unidade. Pela definição, ele tem um jáera associado, no entanto, é possível dizer de antemão quantas vezes terá de repetir os passos para encontrar o jáera?*
> *A1: 1 vez.*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

Neste caso, o professor percebe que o aluno opera com símbolos genéricos (P e I) que representam propriedades de algarismos, não recorrendo a exemplos numéricos. Neste ponto identifica-se a categoria F (Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas) ao operar com P e I, a categoria H (Encontrar relações funcionais) ao estabelecer uma relação direta entre quantidade de iterações e a configuração dada. O professor prossegue com as provocações:

Professor: Na mesma situação da questão anterior, só que sem a exigência de todos os algarismos serem pares exceto a unidade, há a possibilidade de determinação de iterações necessárias para encontrar o jáera antes de calculá-lo? Quais são as possíveis situações? Em casos em que há grupos de algarismos pares consecutivos, qual a relação entre a quantidade de algarismos pares consecutivos e os algarismos ímpares "à direita" desses pares consecutivos? Sugiro que continue fazendo representações usando P e I, modificando as configurações e investigando os casos.
A1: Montei um exemplo, pensei que pode haver uma relação entre a quantidade de P e I com as classes das unidades simples. O exemplo é PP.IIP.PPI. Os pontos são pra enxergar se há relação entre as ordens e as posições das letras.
(Diálogo entre professor e aluno, 2022).

Nesse diálogo nota-se a categoria L (Justificação, prova e teste de conjecturas), pois elabora uma conjectura de que possa haver uma relação entre as ordens e a posição das letras, que por consequência remete a categoria H (Encontrar relações funcionais), no entanto, logo em seguida ele abandona essa estratégia.

O aluno prossegue com sua análise fixando algarismos pares consecutivos e variando as possibilidades das posições e a quantidade de algarismos ímpares:

A1: em casos em que se têm pares consecutivos, se tiver apenas um algarismo ímpar antes dessa sequência de pares, o processo de repetição acaba ali.
(Fala do aluno, 2022).

Neste ponto identifica-se a categoria M (Generalizar um processo matemático), pois conseguiu *cercar* um caso particular do problema proposto, operando apenas com um número abstrato composto pelas propriedades de seus algarismos, ou seja, também a categoria D (Tratar o número algebricamente).

O professor apontou que essa situação em que se tem pares consecutivos antecedendo um ímpar é uma situação particular de um estado de generalização mais amplo, ou seja, o processo de generalização teria que ser separado em diferentes casos. O aluno compreendeu, então, que estava em uma situação particular do caso geral procurado. O professor prossegue:

Professor: Como poderia generalizar mais esse caso particular, em que há sequências de pares consecutivos? Dê exemplos em que haveria mais do que 1 algarismo ímpar antes da sequência de pares.
(Fala do professor, 2022).

A partir daí o aluno reflete que sua conclusão valia não apenas quando se tinha um algarismo ímpar antes da sequência, mas sim que havia uma relação entre a quantidade de pares da sequência e a de ímpares que o antecedem, sendo possível identificar a categoria M (Generalizar um processo matemático). Depois da reflexão, o aluno afirma:

A1: é possível avançar a barreira de Ps quando logo depois da barreira se tenha o mesmo número de Is.
(Fala do aluno, 2022).

Nesse ponto tem-se a categoria H (Encontrar relações funcionais) ao fazer a inferência de que há uma relação entre quantidade de Is, Ps e números de iterações. É possível identificar neste mesmo ponto a categoria F (Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas), pois simbolizou uma sequência de pares com o termo *barreira*.

De imediato o professor interveio:

> *Professor: só se passa a barreira de Ps se tiver a mesma quantidade de Ps e Is? Analise as possibilidades.*
> *A1: se houver a mesma quantidade ou mais de ímpares antes de uma barreira de Ps, a iteração ultrapassará a barreira de Ps, do contrário, o jáera será descoberto na barreira de Ps.*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

O referido diálogo entre professor e aluno contém traços da categoria L (Justificação, prova e teste de conjecturas) pois o aluno teve que testar seu modelo e da categoria M (Generalizar um processo matemático), pois avançou no grau de generalização.

> *Professor: considere casos um pouco mais genéricos como uma configuração que se tenha sequências de pares "diluídos" nas posições, ou seja, não estamos mais a observar a sequência de pares apenas no começo, mas em qualquer posição do número e, ainda, que essa sequência seja "transponível", pois nos casos em que é "intransponível" tudo que haverá à esquerda será inutilizado. Avalie a configuração PPIPIPIIIPPII.*
> *A1:PPIPIPIIIPPII→PPPIPIPIIIPI→PPPPIPIPIII→PPPPPIPIII→PPPPPPIII→PPPPPPII→PPPPPPI→PPPPPPP*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

É possível notar que o aluno fez uso de um raciocínio correto na resolução, no entanto ele não fez a diferenciação entre número e algarismo (o professor, no começo das indagações não havia previsto esse detalhe), pois quando se faz o produto de dois naturais de 0 a 9 (em que um fator é ímpar e outro par), têm-se as opções de configuração: P, IP ou PP. Sendo assim, o aluno ao ser questionado sobre esse detalhe, percebeu que não necessariamente a resolução seria essa, mas que o exemplo resolvido por ele só daria certo nos casos em que o produto fosse sempre na configuração P. Pode-se inferir que esse equívoco surgiu na transformação da representação dos algarismos pela representação de suas propriedades como letras (P e I) indicadas pelo próprio professor. O aluno compreendeu que usar essa configuração baseadas em símbolos P e I não era uma estratégia precisa. A partir daí, o professor questiona se seria possível esgotar as possibilidades das configurações, para poder abranger todos os casos, recebendo uma resposta afirmativa do aluno, de forma que ele trouxesse a relação organizada na tabela 1, configurando A (Explorar propriedades e relações de números inteiros):

Tabela 1 - Organização das Configurações dos Possíveis Produtos

Produtos P	Produtos IP	Produtos PP
1x2 = 4	3x8 = 24	2x5 = 10
1x4 = 4	4x5 = 20	2x7 = 14
1x6 = 6	4x7 = 28	2x9 = 18
1x8 = 8	5x8 = 40	3x4 = 12

2x3 = 6	6x7 = 42	3x6 = 18
		4x9 = 36
		5x6 = 30
		6x9 = 54
		7x8 = 56
		8x9 = 72

Fonte: Autores baseado no registro de A1

Desta forma, o aluno avançou em mais um passo da generalização, montando uma espécie de algoritmo com as propriedades que havia descoberto:

> *A1: inicialmente verifica-se se o número tem "barreiras" de Ps intransponíveis. Se tiver, avalia-se a quantidade de ímpares antes da barreira, essa quantidade será a quantidade de iterações finais antes de chegar no jáera.*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

O aluno avalia, também, que um ponto importante a ser observado são os algarismos que o número possui e sua sequência, justificando pela tabela construída que suas combinações é que determinarão se será adicionado à esquerda um produto P, IP ou PP, podendo identificar neste ponto a categoria M (Generalizar um processo matemático) a partir do desenvolvimento da categoria K (Usar generalizações para resolver tarefas algébricas), pois fez uso de generalizações anteriores para avançar na solução a partir de um pensamento do tipo "se, então". O professor finaliza esse processo provocações sobre a generalização:

> *Professor: quais seriam as consequências de se ter um produto P ou IP ou PP?*
> *A1: apenas os casos IPs complicam um pouco mais, pois os Is gerados podem ainda ser utilizados, caso não tenha nenhuma barreira impossível de passar antes deles. Nos casos em que se gera P e PP, nada se muda na contagem.*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

Neste ponto é possível identificar a categoria M (Generalizar um processo matemático), pois faz o fechamento de seu processo de generalização de determinação, *a priori*, do número iterações necessárias para se encontrar um *járea* dado um número originário qualquer. O professor percebe que o aluno já estava cansado e encerra com uma última provocação:

> *Professor: um número jáera pode ter sido gerado de outros dois números diferentes?*
> (Fala do professor, 2022).

A pergunta em questão envolve a possível correspondência biunívoca entre diferentes números iniciais e seus *jáeras*.

> *A1: sim, há diferentes números que levam a um mesmo jáera: 543 e 295 levam ao jáera 1. Pensei em produtos que dessem 10.*
> (Diálogo entre professor e aluno, 2022).

O diálogo converge com a categoria A (Explorar propriedades e relações de números inteiros) na estratégia de obter diferentes decomposições para um mesmo número e L

(Justificação, prova e teste de conjecturas) ao responder com veemência após o teste.

A análise dos resultados obtidos consistiu em identificar quais elementos do Pensamento Algébrico emergem no aluno em uma situação didática em que se privilegia o protagonismo dos alunos na criação de seus próprios números, bem como a exploração das propriedades inerentes a eles. Assim, foi possível identificar que a proposta fez emergir no aluno alguns elementos do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005) em determinados momentos da tarefa, mais especificamente em 7 das 13 categorias elencadas, mostrando uma insuficiência no aspecto de desenvolvimento global do Pensamento Algébrico.

No entanto, a quantidade de elementos (19 ao total) identificados ao longo da sequência didática evidencia potencialidade para trabalhar certos nichos do Pensamento Algébrico. Deste total identificado, cerca de 30% (6) incidiram sobre a categoria M, o qual demonstra elevado desenvolvimento do aluno relativo ao Pensamento Algébrico. Apesar de cerca de apenas metade dos elementos terem sido evocados, as três vertentes do Pensamento Algébrico foram contempladas, mostrando outra potencialidade de ensino da sequência didática relatada. Com a análise do relato de experiência, foi possível identificar, também, características de uma abordagem pedagógica que viabiliza desenvolver criatividade Matemática no aluno.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de um número particular dos alunos adicionado a uma investigação de propriedades mostrou-se uma proposta pedagógica de alto potencial, pois além de proporcionar o desenvolvimento de processos do Letramento Matemático nos alunos, como já identificados no estudo de Batista e Oliveira (2023), mostrou-se, também como uma sequência didática potente para desenvolver o Pensamento Algébrico nos alunos. O contexto de olimpíadas é secundário, quando comparado à versatilidade para aplicação, resguardadas as intenções educativas, a uma ampla faixa etária do período de escolarização. O fato de os discentes criarem o próprio objeto de estudos revelou um protagonismo do aluno, incidindo em uma motivação nos estudos, visto que eles tiveram conhecimento do ineditismo de suas produções.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. de; SANTOS, Marcelo C. dos. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de educação Matemática**, Campo Mourão, v.6, n. 10, p. 34-60, jan/jun 2017. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6055/4078 . Acesso em: 15 out.

2024.

BATISTA, E. F. M.; OLIVEIRA, P. C. Projeto de imersão na OBMEP: o desenvolvimento de processos do letramento matemático através de uma situação didática que privilegia o protagonismo do aluno. *In*: Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em aulas de Matemática, 9., 2024, Campinas. **Anais [...]**. Campinas: UNICAMP, 2024, 12p. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/ixshiam/785422-PROJETO-DE-IMERSAO-NA-OBMEP---O-DESENVOLVIMENTO-DE-PROCESSOS DO-LETRAMENTO-MATEMATICO-ATRAVES-DE-UMA-SITUACAO-DID. Acesso em: 15 out. 2024.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. **Journal for Research in Mathematics Education,** v.36, n.5, p. 412-446, 2005.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio**. 2007. 206 f. Tese (Doutorado) - Universidade de Brasília, Instituto de Psicologia, Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Brasília, 2007. Disponível em: http://www.realp.unb.br/jspui/handle/10482/2528 . Acesso em: 06 nov. 2024.

GONTIJO, C. H.; OLIVEIRA, D. L. de; COSTA, I. L; BEZERRA, W. W. V. (Org.). **Avaliação em matemática:** Contribuições do feedback para as aprendizagens**.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2020. Disponível em: https://livros.unb.br/index.php/portal/catalog/book/61 .Acesso em: 07 nov. 2024.