

## Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau

Semantic congruence and referential equivalence in a problem involving first degree equations

---

ÉDREI HENRIQUE LOURENÇO<sup>1</sup>  
PAULO CÉSAR OLIVEIRA<sup>2</sup>

### Resumo

*Nesse trabalho objetivamos analisar quais critérios de congruência são conservados em quinze problemas com equações do primeiro grau apresentados em um material didático apostilado e tecer reflexões sobre a influência dos critérios não conservados nas possíveis dificuldades dos alunos. Essa é uma pesquisa bibliográfica e documental e seu desenvolvimento apontou o baixo índice de conservação da correspondência semântica das unidades de significado e o alto índice de conservação da univocidade semântica terminal nos problemas analisados. Além disso, os dados levantados apontam para a necessidade de se ampliar as análises já realizadas nas pesquisas desenvolvidas, considerando a variedade de tipos de problemas de 1º grau.*

**Palavras-chave:** *Equação do 1º grau; Congruência Semântica; Registros de Representação Semiótica; Critérios de não Congruência.*

### Abstract

*In this work we aim to analyze the congruence criteria what are conserved in fifteen problems with equations of the first degree, in a didactic material and reflect on the influence of criteria not conserved in the difficulties of the students. This is a bibliographical and documentary research and its development pointed the low conservation index of the semantic correspondence of the units of meaning and the high conservation index of the terminal semantic univocity in the analyzed problems. In addition, the data gathered point to the need to expand the discussions performed achieved in the researches developed, considering a variety of types of problems of the first degree.*

**Keywords:** *Equation of the first degree; Semantic Congruence; Registers of Semiotic Representation; Criteria for non-congruence.*

---

<sup>1</sup> Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos e professor do Colégio Politécnico de Sorocaba – henrique.edrei@gmail.com

<sup>2</sup> Doutor em Educação Matemática e professor do Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos, campus de Sorocaba – paulooliveira@ufscar.br

## Introdução

Historicamente, os problemas que envolvem a passagem de um enunciado descrito em língua natural para uma expressão algébrica constituem, para muitos alunos, um abismo quase que intransponível. O tema tem despertado grande interesse de pesquisadores da Educação Matemática que procuram compreender tais dificuldades, bem como sugerir alternativas a fim de minimizar o hiato notado.

Gil (2008) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de compreender as dificuldades que os alunos possuem na aprendizagem da Álgebra, tendo em vista as inquietações que tais dificuldades lhe causavam desde seus primeiros anos de docência. Após realizar revisão da literatura, aplicar testes, entrevistar alunos e professores da 7ª série (atual 8º ano) do Ensino Fundamental, destacou que na resolução de um problema envolvendo equações de 1º grau, o aluno necessitou fazer a “tradução” da linguagem corrente para a linguagem algébrica e, segundo a autora, as dificuldades nessa tradução residiram na interpretação da questão.

De acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, a referida dificuldade é decorrente, em grande parte, do efeito do fenômeno da não congruência e, por isso, ele deve ser levado em conta no ensino e nas reflexões sobre o ensino de matemática. Tal teoria foi criada por Raymond Duval, o qual considera não ser possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação.

Segundo Duval (2009, p.32), a especificidade das representações semióticas “consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações ‘equivalentes’ em um outro sistema semiótico”.

No contexto geral da semiótica o signo é relacionado a um objeto concreto, como o desenho de uma cadeira para representar o objeto que utilizamos para sentar, porém na especificidade da matemática o símbolo (signo) representa um objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). De fato, o objeto matemático não é perceptível, ou seja, é abstrato; assim, seu acesso se dá via representações semióticas.

A matemática utiliza uma grande variedade de representações semióticas e, dada essa multiplicidade de registros de representação, Duval (2009) enfatiza a necessidade de não confundir o objeto matemático com sua representação trazendo à baila a questão da dualidade entre o objeto e sua representação. A esse respeito ele expõe que “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p.14). Isso se justifica no fato de que diferentes representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático. Assim, destaca

que “toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (DUVAL, 2009, p.91).

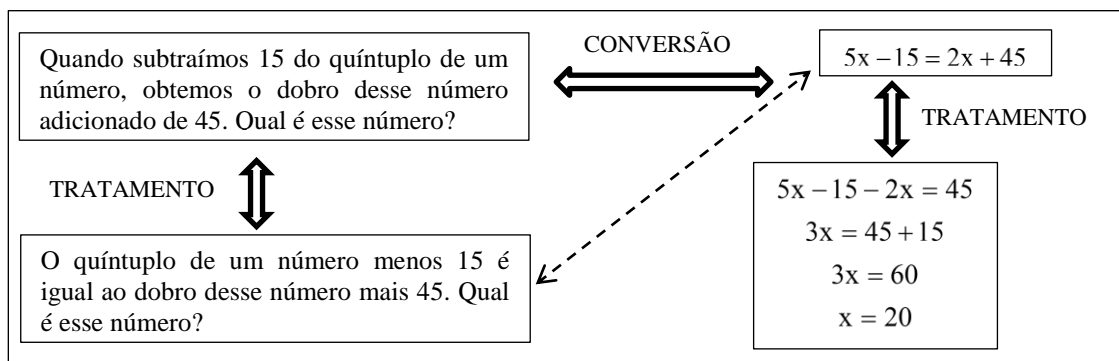
Para exemplificar esta ideia podemos considerar um problema envolvendo equação de primeiro grau, o qual pode ser representado, dentre outras formas, por meio da língua natural (que é mais frequente), por meio de diagramas ou linguagem algébrica. Então, o objeto matemático não é uma representação em especial, mas sim o conjunto de todas as suas representações.

Duval (2009, p.90) afirma que “para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas desse objeto e coordená-las”. Portanto, no processo de aquisição do conhecimento matemático deve se levar em conta os diversos registros de representação semiótica, assim como as transformações específicas que estes permitem.

Segundo a teoria, tais transformações são corriqueiramente reduzidas a um traço comum, não fazendo distinção entre as atividades de tratamento e conversão. Desse modo, Duval (2009) destaca a importância dessas duas transformações de registros de representação, enfatizando a necessidade de distingui-las claramente.

O tratamento é uma transformação de representação dentro de um mesmo registro. A resolução de uma equação do 1º grau em sua representação algébrica serve de exemplo para este tipo de transformação. Já a conversão é uma transformação de representação que consiste em mudar o registro, conservando o mesmo objeto denotado. Por exemplo, dado um problema envolvendo equação do primeiro grau em língua natural podemos convertê-lo para uma equação que seja referencialmente equivalente a ele e vice-versa. A figura 1 ilustra a diferença entre esses dois tipos de transformações.

Figura 1: Ilustração das transformações de registros em um problema de primeiro grau.



Os registros de representação possuem conteúdos distintos que são estabelecidos pelo sistema semiótico no qual são produzidos. Para Duval (2009) não basta que o sujeito conheça o conteúdo de um registro, ou mesmo de vários isoladamente, mas sim que

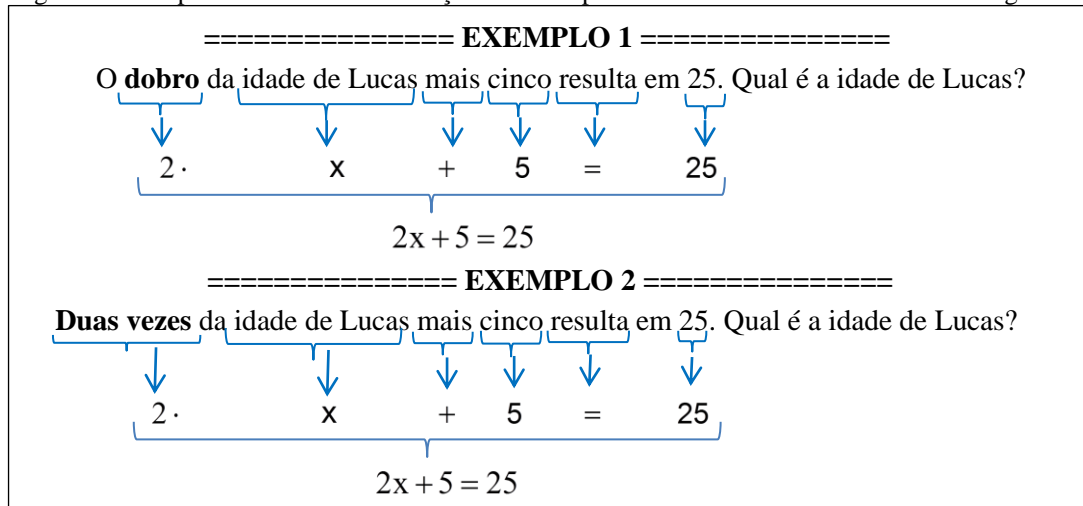
transite entre as mais diversas representações que possui o objeto matemático em questão. Portanto, a conversão de registro assume papel importantíssimo. Ele destaca que:

É preciso que um sujeito seja capaz de atingir o estado da coordenação de representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra. (DUVAL, 2009, p.82)

O custo cognitivo desse trânsito depende em muito do que o autor chama de congruência semântica. Sendo que, a esse respeito, destacamos que uma conversão é congruente quando a representação final transparecer na representação de partida, o que torna uma atividade relativamente trivial. Enquanto que uma conversão não congruente é aquela em que a representação final não transparece na representação de partida. De acordo com tal teoria, o custo cognitivo quando a conversão é congruente é menor do que quando a conversão é não congruente.

Duval (2009, p. 68-69) elenca três critérios para determinar a congruência semântica envolvida em uma transformação do tipo conversão: (A) correspondência “semântica” dos elementos significantes; (B) univocidade “semântica” terminal; (C) ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações. Para ilustrar melhor cada um desses critérios que foram amplamente utilizados em nossa pesquisa, consideremos os exemplos apresentados na figura 2.

Figura 2: Exemplos relativos à conservação da correspondência semântica das unidades de significado



No exemplo 1 verificamos que a palavra “dobro” no registro em língua natural (partida) possui apenas um signo, enquanto que na representação algébrica (chegada) temos o número “2” e a operação de “multiplicação” em correspondência a palavra “dobro”, isto é, dois signos são considerados. Assim, nesse exemplo não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado (critério A).

Já no exemplo 2 observamos que o mesmo problema, com uma pequena alteração (tratamento) na escrita, permite verificar a correspondência semântica das unidades de significado. Observe que agora a expressão “duas vezes”, que possui dois signos, está em correspondência com “2·” que também possui dois signos considerados.

Esses dois exemplos apresentados na figura 2 nos permitem também iniciar a análise do critério C, referente à conservação da ordem das unidades de significado. Em ambos os exemplos verificamos que a ordem das unidades significantes nas duas representações, tanto em língua natural quanto na representação algébrica é a mesma. Para confrontar com essa ideia, consideremos o problema reescrito da seguinte maneira: “*Se adicionarmos um número ao dobro da idade de Lucas, obteremos 25. Qual é a idade de Lucas, sabendo que o número adicionado foi o cinco?*” Nessa reformulação, verificamos que as unidades de significado no registro de partida não estão na mesma ordem que as unidades de significado consideradas na representação algébrica por meio da equação  $2x + 5 = 25$ .

Segundo Duval (2009, p.69), “esse critério é, sobretudo, importante quando se trata de comparar frases e fórmulas literais”. Ocorre que muitos alunos acreditam que para fazer a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico é suficiente fazer a tradução das palavras presentes no enunciado na mesma ordem em que elas aparecem. Nesse exemplo, os alunos podem incorrer no erro de equacionar o problema com  $2x = 25 + 5$ . Mas para a matemática, o que importa é a equivalência referencial.

A Figura 3 contém dois exemplos que permitem ilustramos a conservação, ou não, da univocidade semântica terminal.

Figura 3: Exemplos relativos à conservação (ou não) da univocidade semântica terminal

<b>EXEMPLO 3</b>	
Lucas e Fernando colecionam figurinhas. Após <u>ganhar</u> 20 figurinhas de Fernando, Lucas ficou com 35 figurinhas. Quantas figurinhas Lucas possuía inicialmente?	
Subtração	←
<b>EXEMPLO 4</b>	
Lucas e Fernando colecionam figurinhas. Se Lucas tinha 20 figurinhas e <u>ganhou</u> 15 figurinhas de Fernando, com quantas ficou?	
Adição	←

No exemplo 3 temos uma situação em que não há conservação da univocidade semântica terminal, uma vez que o verbo “ganhar” apresenta sentido contrário ao que aparecerá na expressão característica. A palavra “ganhar” está muito associada à operação de adição, mas nessa situação ela justifica a operação de subtração a ser realizada. Já no quinto exemplo a palavra “ganhou” está de fato associada à operação de adição. Embora esses dois últimos exemplos não caracterizem problemas envolvendo equações do primeiro grau, consideramos adequados para ilustrar tal critério.

Assim, feitas tais considerações e levando em conta que a conceitualização implica em uma coordenação de diferentes registros de representação, a teoria dos Registros de Representação Semiótica permite compreender como se dá o processo de aprendizagem em matemática do ponto de vista cognitivo do aluno, de modo que no processo de planejamento do ensino dos conteúdos a serem ensinados em matemática é importante levá-la em consideração. Portanto, ela contribuiu para ampliarmos nosso entendimento sobre os processos de aprendizagem, sendo que nesse trabalho analisamos problemas envolvendo equações do primeiro grau utilizando os pressupostos elencados anteriormente, tendo em vista conhecer, *a priori*, as barreiras que os alunos podem enfrentar para poder, *a posteriori*, apresentar caminhos alternativos para transpor as dificuldades.

### **Delineamento da pesquisa**

No que tange à utilização da teoria dos Registros de Representação Semiótica, destacamos o trabalho de Ferreira, Santos e Curi (2013) que mapeou e analisou 80 pesquisas, dentre dissertações e teses, na área de Educação Matemática realizadas no Brasil no período de 2002 a 2012, que foram norteadas pela utilização da referida teoria. O objetivo das autoras foi apresentar um panorama de seu uso, bem como identificar mudanças ocorridas nas abordagens das pesquisas, considerando os apontamentos de outro trabalho de mesma natureza, publicado por Colombo, Flores e Moretti (2008).

Por um lado, Ferreira, Santos e Curi (2013) destacaram o expressivo número de trabalhos realizados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), totalizando 34 dos 80 trabalhos, representando 42,5% do total. Esse fato já havia sido destacado em Colombo, Flores e Moretti (2008), permitindo caracterizar os pesquisadores de tal instituição como grandes estudiosos dessa abordagem teórica.

Por outro lado, as análises das pesquisas realizadas por Ferreira, Santos e Curi (2013, p.13) apontaram que há “uma carência no cenário da Educação Matemática de utilizar a teoria de Duval (1993, 2009) não apenas para evidenciar um “jogo” de registros, mas sim, para efetivamente auxiliar os alunos a terem autonomia na aprendizagem matemática”. Segundo as autoras, esse trabalho confirmou a necessidade de reflexões que abarquem orientações para professores sobre a utilização de tal teoria.

Outro ponto de suma importância destacado por Ferreira, Santos e Curi (2013, p.12) foi que a utilização de diferentes registros de representação nos processos de ensino e aprendizagem pode contribuir para a aprendizagem matemática. Essa é a tese principal defendida por Raymond Duval em sua teoria e mais ainda, segundo a teoria, não só contribui, mas é essencial. Porém, as autoras destacaram que “a mobilização desses registros em termos de congruência é um desafio para a maioria dos alunos em

matemática” e que “práticas que levem em conta esse fato precisam ser mais bem discutidas e desenvolvidas” (FERREIRA; SANTOS; CURI, 2013, p.12).

Dessa forma, considerando os apontamentos da pesquisa de Ferreira, Santos e Curi (2013), propusemos analisar problemas envolvendo equações de 1º grau, considerando a teoria dos Registros de Representação Semiótica como aporte teórico. A análise e reflexão centralizaram-se na relação entre o fenômeno da não congruência e as possíveis dificuldades dos alunos. Tal análise originou orientações para professores sobre a utilização da referida teoria para promoção da autonomia do aluno, trazendo à baila um dos pontos iniciais do trabalho pedagógico, que é a escolha dos problemas a serem resolvidos.

É fato que, ao selecionar problemas envolvendo equações do primeiro grau para serem discutidos em aula ou sugeridos para estudo em casa, seja para introdução ou aprofundamento do assunto, os professores consultam, em sua maioria, livros didáticos. Este material é a principal e, em alguns casos, a única fonte de consulta que os professores recorrem para preparar suas aulas. A respeito do uso do livro didático, Lajolo (1996, p.4) destaca que:

O livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares.

Nesse sentido, entender o que os livros didáticos trazem relacionado ao estudo de problemas com equações do primeiro grau pode direcionar o trabalho do professor no ensino de tal conteúdo, sendo possível verificar o que é necessário acrescentar, retirar ou mesmo remodelar no material consultado a fim de proporcionar uma melhor compreensão durante o processo de aprendizagem do tema.

Além do livro didático, no contexto escolar da rede particular de ensino, é comum a utilização de materiais didáticos apostilados que sugerem atividades e planos de aula que podem ser utilizados/seguidos pelo professor em sua prática. Assim, como o primeiro autor desse trabalho leciona na referida rede de ensino, julgamos adequado analisar o material apostilado utilizado na instituição na qual está inserido.

Portanto, nosso objetivo de pesquisa é analisar quais critérios de congruência são conservados em quinze problemas envolvendo equações do primeiro grau apresentados no material didático selecionado, quando considerada as representações em língua natural e algébrica, bem como tecer reflexões sobre a influência dos critérios não conservados nas possíveis dificuldades dos alunos.

Para tanto, procuramos responder as seguintes questões de investigação: Quais dos três critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69) são conservados em cada

um dos problemas? Qual a incidência da não conservação para cada um dos critérios nos problemas selecionados?

## **Percurso metodológico**

Essa é uma pesquisa bibliográfica e documental, sendo que o estudo de trabalhos anteriores como Silva (2011) e Costa (2010), além da própria teoria dos Registros de Representação Semiótica constituíram sua parte bibliográfica. Já a parte documental foi caracterizada pela análise de problemas selecionados da apostila de Matemática do Sistema Ético de Ensino da editora Saraiva. Trata-se do volume 2 (7º ano) da coleção Fundamento, material do professor.

Os problemas que analisamos estão assinalados com o ícone “Ação”, sendo problemas propostos para resolução em sala de aula. Analisamos nessa pesquisa os quinze primeiros problemas propostos no capítulo 4 da unidade 2. Limitamo-nos a esses problemas devido ao fato que os problemas seguintes tratavam de inequações e resolução de problemas envolvendo tal tópico, bem como uma sugestão de resolução de problemas utilizando diagramas. Os problemas selecionados foram suficientes para que pudéssemos discorrer sobre o fenômeno da não congruência e a equivalência referencial em matemática.

Costa (2010, p.13) investigou “em que medida acontece a conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau”. Essa pesquisa foi motivada pelas dificuldades constatadas em diversos trabalhos sobre a temática no que tange a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, bem como pela constatação de tais dificuldades encontradas pelos alunos de uma turma de 8º ano. Segundo Costa (2010), os alunos faziam as transformações de forma mecânica e sem compreensão dos procedimentos empregados. Assim, ele elaborou oito problemas de primeiro grau do tipo partilha, fixando alguns elementos e variando apenas os fatores de congruência que foram conservados, tendo em vista associar a influência desses na conversão dos registros.

Costa (2010) apresentou, dentre outros resultados, que para o problema em que os três critérios não eram conservados a taxa de conversão total para o registro algébrico foi a menor de todas, indo de encontro com o que pressupõe Duval (2009). Além disso, ele destacou que o grau da não congruência foi acentuado também para um desses critérios em particular, o da conservação da univocidade semântica terminal, inferindo que “nos problemas de partilha a influência dos três fatores interfere tanto quanto a univocidade semântica” (COSTA, 2010, p. 87).

Silva (2011) baseou-se no trabalho de Costa (2010) para tecer suas discussões, utilizando inclusive os mesmos problemas elaborados e os protocolos obtidos por ele.



Seu objetivo, porém, foi “analisar em que medida a estrutura de problemas baseados em fatores de congruência podem conduzir os alunos a determinados registros na transformação de registros da linguagem natural em linguagem algébrica” (SILVA, 2011, p.16). Dessa forma, Silva (2011) fez uma reorganização dos protocolos utilizados em Costa (2010) e posteriormente tratou os dados com o auxílio de um *software*, chamado *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive* (CHIC), tencionando fazer o cruzamento das respostas categorizadas e os sujeitos participantes da pesquisa.

Com os resultados encontrados pôde inferir que, em média, 59% dos alunos não lançaram mão dos registros algébricos para tentar resolver os problemas com equações do primeiro grau propostos. Segundo Silva (2011, p. 60), isso pode ser um indicativo de que os alunos possuem dificuldades ao utilizar tal registro, conforme pressuposto de pesquisas anteriores. Além disso, dentre outros pontos, destacou que quando o problema de partilha conserva a univocidade semântica terminal e as relações são multiplicativas há uma chance maior de os alunos utilizarem o registro em linguagem algébrica.

Os trabalhos de Costa (2010) e Silva (2011) diferenciam-se a medida que o primeiro deles objetivou verificar o sucesso da conversão em função da conservação ou não de cada um dos critérios de congruência, enquanto que o segundo buscou verificar a mobilização de determinados registros (inclusive algébrico) dada a variação da conservação dos critérios de congruência.

A presente investigação insere-se nesse contexto como sendo uma aplicação dos resultados das pesquisas acadêmicas, em especial as de Costa (2010) e Silva (2011), abarcados pela teoria dos Registros de Representação Semiótica, tendo em vista estreitar a distância entre universidade e escola básica.

### **Análise dos problemas selecionados**

Na apreciação dos problemas selecionados tecemos uma análise do fenômeno de congruência e da não-congruência, no que tange às representações em língua natural e em linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau com uma incógnita.

Assim, tendo em vista facilitar a apreciação do leitor, destacamos cada um dos problemas em quadros, identificando seu número (P1, P2, etc.), bem como se o mesmo conserva ou não o critério de congruência considerado (A, B ou C), de modo que quando o critério é conservado utilizamos o símbolo ✓, enquanto que quando não há conservação do critério usamos o símbolo ✘. Então, feitas tais considerações, passamos a supracitada análise dos problemas selecionados.

Quadro 1: Problema número 1 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P1</b>	<b>1</b> A soma de dois números inteiros e consecutivos é 131. Determine esses dois números.	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

Nesse primeiro problema apresentado podemos observar que a correspondência semântica entre as unidades de significado (critério A) não é conservada, uma vez que a palavra “consecutivos” possui apenas um signo, enquanto que sua interpretação, nesse caso, está associada a dois signos: +1 (o mesmo ocorre quando considerada a possibilidade do -1).

A univocidade semântica terminal (critério B) é conservada, já que a palavra “soma” está associada à operação de adição, tanto no enunciado em língua natural quanto na equação que é referencialmente equivalente ao problema.

A ordem das unidades de significado (critério C) não é conservada nesse problema, posto que a palavra “soma” aparece primeiro na descrição em língua natural do problema, enquanto que em sua representação algébrica o símbolo de adição (+), relacionado a essa unidade de significado, é o segundo a aparecer.

Para confrontar com a análise feita sobre o critério C e esclarecer o leitor sobre o que fora dito, consideremos o mesmo problema descrito da seguinte maneira: “*Um número inteiro adicionado ao seu consecutivo é 131. Quais são esses números envolvidos?*”. Observamos que, após esse tratamento realizado, o enunciado passaria a conservar a ordem das unidades de significado.

Quadro 2: Problema número 2 com análise da conservação dos critérios de congruência

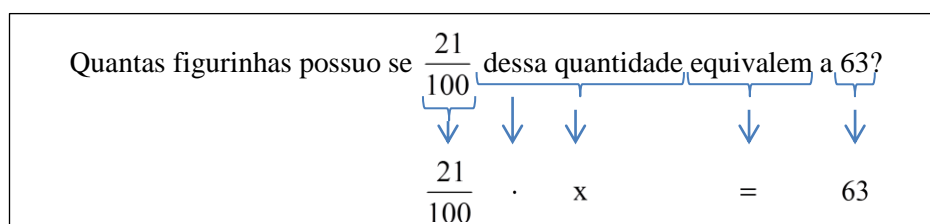
<b>P2</b>	<b>2</b> Quantas figurinhas possuo se $\frac{21}{100}$ dessa quantidade equivalem a 63?  _____	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✓
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

No segundo problema verificamos que há conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado, pois a quantidade de signos de cada uma das unidades significantes do registro de partida corresponde à mesma quantidade signos no registro de chegada. Observe na figura 4 que o trecho “ $\frac{21}{100}$  dessas figurinhas equivalem a 63”

possui cinco signos a serem considerados, que é exatamente o mesmo que  $\frac{21}{100} \cdot x = 63$  possui.

Figura 4: Análise dos critérios de congruência do problema P2



A univocidade semântica terminal também é conservada nesse problema. A fração  $\frac{21}{100}$  e o natural 63, obviamente conservam tal critério, já a palavra “equivalem” é convertida para o símbolo de igualdade (=), de modo que ambos possuem apenas um signo a ser considerado. Além disso, a expressão “dessa quantidade” que possui dois signos está relacionada à representação “· x” que também possui dois signos.

O critério C, referente à ordem das unidades de significado, é conservado nesse problema. A figura 4 ilustra claramente a conservação de tal critério, de forma que não acrescentaremos maiores detalhes a esse fato.

Quadro 3: Problema número 3 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P3</b>	<p>3 Na festa de casamento de minha tia Nena havia 250 pessoas, e <math>\frac{3}{5}</math> delas eram mulheres. Quantos homens havia na festa?</p>	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

Nesse terceiro problema não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, posto que a palavra “delas” possui apenas um signo e está associada à “ $\times 250$ ”, que possui dois signos.

Porém, nele verificamos tanto a conservação da univocidade semântica terminal quanto à conservação da ordem das unidades de significado, pois entendemos que para encontrar a quantidade x de homens, seria necessário proceder uma subtração, 250 menos três quintos de 250, cujas unidades significantes foram apresentadas nessa ordem no enunciado do problema. É importante destacar aqui que a consideração de apenas dois sexos, homem e mulher, justifica a operação de subtração.

Quadro 4: Problema número 4 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P4</b>	<p>4 Para responder qual era sua idade, Raquel disse a sua amiga: “Se eu multiplicar a minha idade por 4 e subtrair 20, o resultado será igual ao dobro da minha idade mais 12”. Qual é a idade de Raquel?</p>	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

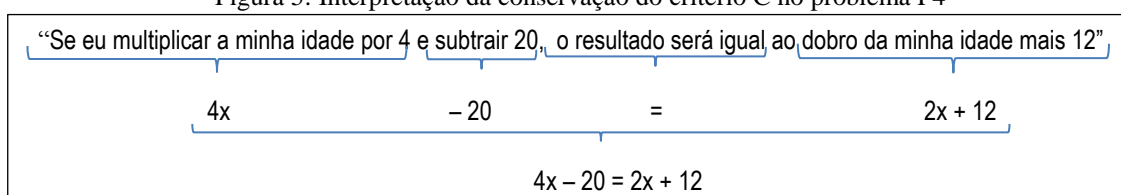
Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

Observamos que no quarto problema não há conservação da correspondência semântica dos elementos significantes, já que a palavra “dobro” possui apenas um signo na representação em língua natural, enquanto que seu correspondente,  $2\times$ , possui dois.

Há conservação da univocidade semântica terminal nesse problema, pois as unidades a serem consideradas não possuem significado antônimo ao que está descrito em língua natural no enunciado. Observe que em “multiplicar [...] por 4” está de fato associada a  $\times 4$ , ou seja, não há interpretação contrária. O mesmo ocorre para as unidades significantes “subtrair 20”, “dobro da minha idade” e “mais 12” presentes no problema.

Além disso, podemos constatar que há conservação da ordem das unidades de significado nesse problema. Para melhor ilustrar isso, consideremos a Figura 5 a seguir:

Figura 5: Interpretação da conservação do critério C no problema P4



Em conformidade com essa organização, vale considerar Duval (2012b, p.111) ao destacar que “toda fórmula que se organiza simetricamente por um lado e de outro lado por um símbolo de relação (ou de operação) central é melhor compreendida pelos alunos”. Em consonância com Duval (2012b), os alunos terão menos dificuldades ao fazer a conversão desse problema, de forma organizada e sistematizada, por meio de equação do 1º grau com uma incógnita.

Quadro 5: Problema número 5 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P5</b>	<p><b>5</b> Num estacionamento há 100 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número de carros é o triplo do número de motos. Quantos carros há nesse estacionamento?</p>	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	⊗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	⊗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)


Continuando nosso itinerário de análise, nesse quinto problema verificamos que a unidade de significado “triplo” possui apenas um signo, enquanto que na representação algébrica,  $3\times$  possui dois signos, de forma que fica então caracterizada a não conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado.

Aqui constatamos que há conservação da univocidade semântica terminal, à medida que não há palavras portadoras de informação referentes às operações necessárias com significados antônimos, como na utilização da palavra ganhar com significado de subtração. No problema, a expressão “entre carros e motos” é comum ser utilizada para indicar a junção, ou seja, para designar a operação de adição de dois objetos, nesse caso carros e motos. Ainda, é importante destacar aqui que, para tal caracterização, levamos

em conta o contexto de tal expressão, isto é, se fosse utilizada na frase “*aquela menina estava correndo entre carros e motos*” teria um significado totalmente distinto de como é apresentado no problema.

Por fim, destacamos que nesse problema não se conserva a ordem das unidades de significado. Tal fato fica evidentemente constatado quando consideramos a atribuição da incógnita  $x$  para o número de motos, a equação que é referencialmente equivalente ao problema é  $3x + x = 100$ .

Quadro 6: Problema número 6 com análise da conservação dos critérios de congruência

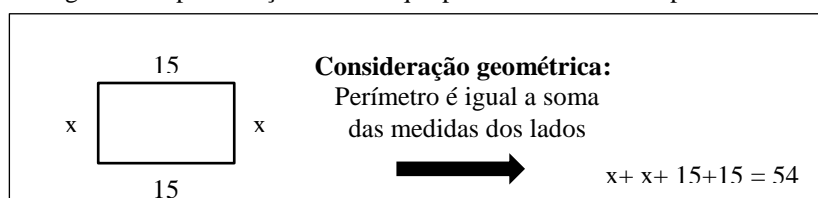
<b>P6</b>	<b>6</b> Luísa comprou um terreno retangular cujo perímetro é igual a 54 metros. Se esse terreno tem 15 metros de comprimento, quantos metros ele tem de largura? 	<b>Critério</b>	
		A	✓
		B	✓
		C	✗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

No sexto problema apresentado há uma conexão com a geometria, mais especificamente com o perímetro de retângulo. Dessa forma, espera-se que o aluno disponha desse conhecimento prévio para a resolução da mesma e, caso o aluno não se recorde, eis uma ótima oportunidade de o professor revisar tal conteúdo numa perspectiva espiralada do ensino da matemática.

No processo de conversão da representação em língua natural para a representação algébrica, pode-se levar em conta uma representação auxiliar caracterizando o terreno retangular de Luísa, conforme apresentado na figura 6 abaixo.

Figura 6: Representação auxiliar que pode ser utilizada no problema P6



Uma vez considerada essa representação auxiliar, as características que definem um retângulo, bem como o fato de que o perímetro de um retângulo é dado pela soma das medidas dos lados, a equação do 1º grau com uma incógnita pode ser obtida sem grande esforço cognitivo. É possível verificar que a expressão algébrica obtida é referencialmente congruente à figura e, conseqüentemente, também é referencialmente equivalente ao problema inicialmente proposto em língua natural.

No caso de polígonos, a palavra “perímetro” está associada à soma da medida dos lados, que também será representada por um único símbolo (+). Assim, constatamos que a correspondência semântica das unidades de significado é conservada nesse problema. Além disso, também verificamos aqui a conservação da univocidade semântica

terminal. O mesmo não pode ser dito da ordem das unidades de significado nesse problema, que não é conservada. É suficiente observar que somente após ter dito que o perímetro era igual a 54 metros, é que o problema apresentou o comprimento desse terreno.

Quadro 7: Problema número 7 com análise da conservação dos critérios de congruência


<b>P7</b>	<b>7</b> Bruna foi a uma loja de eletrodomésticos e comprou uma cafeteira e um liquidificador. A compra ficou em R\$ 383,00. Como a cafeteira era para café expresso, acabou custando mais caro que o liquidificador: a diferença foi de R\$ 213,00! Quanto Bruna pagou por cada um dos produtos?	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✓
		<b>B</b>	✗
		<b>C</b>	✗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

No sétimo problema sugerido para os alunos na seção “Ação” do material que analisamos há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, porém, observamos que não há conservação da univocidade semântica terminal em relação à equação  $x + (x + 213) = 383$ , ao passo que a palavra “diferença” seria utilizada no sentido de adição (preço do liquidificador mais R\$ 213,00). É importante observar que quando consideramos a equação  $x + (x - 213) = 383$ , a palavra diferença assumiria o sentido de subtração, de forma que tal critério seria conservado (a designação da incógnita muda nessa segunda equação). Para nossa análise, estamos considerando a primeira equação, apresentada na sugestão de resposta do material didático.

Ainda, quanto ao terceiro critério considerado, verificamos que não há conservação da ordem das unidades de significado porque tais unidades consideradas no enunciado não estão dispostas na mesma ordem em que as unidades de significado apresentadas na linguagem algébrica, principalmente pelo fato de “a diferença foi de R\$ 213,00!” ser apresentada no final do problema.

Quadro 8: Problema número 8 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P8</b>	<b>B</b> Lucas, Marcos e Samir colecionam selos. Juntos, eles têm 206 selos. Lucas tem o triplo da quantidade de selos que Marcos possui, e Samir possui 10 selos a mais que Lucas. Quantos selos tem cada um dos meninos?		<b>Critério</b>	
			<b>A</b>	✗
			<b>B</b>	✓
			<b>C</b>	✗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)


A análise realizada considerando os critérios de congruência nos permitiu inferir que o problema 8 não conserva a correspondência semântica das unidades de significado, pois em “Lucas tem o triplo da quantidade de selos que Marcos possui”, a palavra “triplo” (1 signo) está associada a três vezes ( $3\times$ ) que possui dois signos. É importante esclarecer que estamos descartando aqui a possibilidade de o aluno omitir o símbolo

para multiplicação ou, dito de outra maneira, mesmo que tal omissão ocorra, ainda consideraremos como dois signos.

Quanto à univocidade semântica terminal, destacamos que ela é conservada nesse problema, já que as expressões “triplo” e “a mais” estão associadas à multiplicação por três e a operação de adição, respectivamente.

Já no que tange ao critério C, inferimos que não é conservada a ordem das unidades de significado. Haja vista que nesse problema podemos observar duas relações: “Lucas tem o triplo da quantidade de selos de Marcos” e “Samir possui 10 selos a mais que Lucas”, sendo que para determinar a quantidade de selos de Lucas, que apareceu primeiro na relação, necessitamos saber antes a quantidade de selos de Marcos, segundo a aparecer na relação e fonte para descoberta dos demais.

Quadro 9: Problema número 9 com análise da conservação dos critérios de congruência


<b>P9</b>	<p><b>9</b> Sara, Mila e Denise são amigas há muitos anos. A idade delas é representada por números consecutivos, sendo a soma dessas três idades igual a 108. Quantos anos tem cada uma das amigas, sabendo que Mila é a mais nova e Sara é a mais velha?</p> 	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

Observamos que nesse nono problema não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, pois assim como analisamos no primeiro problema, a palavra “consecutivos”, que possui apenas um signo está associada a mais de um signo em sua representação algébrica, podendo variar de acordo com a escolha para atribuição da incógnita  $x$ .

Já no que tange à univocidade semântica terminal e à ordem das unidades de significado, verificamos que ambas são conservadas. A língua natural permite uma variedade gigantesca para dizer algo, de forma que o simples fato de mencionar que as idades são números consecutivos antes de anunciar que a soma é igual a 108 anos, faz com que haja conservação da ordem das unidades de significado. Isso não ocorreu no primeiro problema.

Quadro 10: Problema número 10 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P10</b>	<p><b>10</b> Joel fez uma poupança e agora vai usar esse dinheiro em algumas melhorias na sua casa. Com 60% do que foi guardado, ele vai pintar a parte interna da casa; com 25% desse valor, vai comprar um sofá novo e, com os R\$ 525,00 restantes, vai comprar uma TV de LED para colocar no seu quarto. Qual é o valor que Joel economizou na poupança?</p> 	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)




Nesse problema a correspondência semântica das unidades de significado não é conservada. Ao transformarmos o registro numérico simbólico 60%, que possui dois signos, para sua representação decimal 0,6, que possui um signo, temos caracterizada a não conservação desse critério. O mesmo vale para 25%. Além disso, a expressão “do que foi guardado” possui quatro signos enquanto que “ $\cdot x$ ” possui apenas dois signos. É interessante destacar aqui um exemplo nesse enunciado que ilustra uma característica bastante forte da língua natural que influencia diretamente na conservação ou não desse primeiro critério: em “25% desse valor” temos apenas duas palavras associadas à “ $\cdot x$ ”, diferenciando-se das quatro – “do que foi guardado” – utilizadas para referenciar o valor total economizado. Assim, se o aluno decida transformar as porcentagens em frações ao invés de decimais conforme ilustramos, a análise de congruência seria a mesma.

Já no que tange a univocidade semântica terminal, verificamos sua conservação. A palavra “restantes” presente no enunciado desse problema pode causar alguma dificuldade de verificação, pois ela está muito associada à operação de subtração ou, dependendo da situação, ao resto de uma divisão. E nesse problema esta palavra justifica a operação de subtração realizada, quando considerada a equação  $x - 0,6x - 0,25x = 525$ .

Todavia, é importante observar que, caso o aluno percorra o caminho que conduza a  $\frac{60}{100}x + \frac{15}{100}x + 525 = x$  ou  $0,6x + 0,15x + 525 = x$ , verificaríamos a não conservação do critério B, já que todas as operações seriam de adição. Aqui, tomamos a decisão de levar em consideração a questão sob o ponto de vista em que ela conserva mais critérios de congruência. Mas já adiantamos que conhecer tais possibilidades pode contribuir para que o professor melhore sua abordagem em aula, inclusive discutindo os vários caminhos com os alunos.

A conservação da ordem das unidades de significado é verificada nesse problema, pois as unidades significantes presentes no registro de partida em língua natural estão na mesma ordem das unidades significantes no registro de chegada em linguagem algébrica.

Quadro 11: Problema número 11 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P11</b>	<p><b>11</b> Marinete comprou uma máquina de lavar roupas no valor de R\$ 832,80. Pagou R\$ 277,60 de entrada e o restante em oito prestações fixas. Qual é o valor de cada uma dessas prestações?</p> 	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✓
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓


Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)



Esse problema conserva a correspondência semântica entre as unidades de significado uma vez que a cada unidade significante elementar do registro de partida está associada a uma única unidade significante no registro de chegada em linguagem algébrica.

Além disso, o problema em questão também conserva a univocidade semântica terminal, bem como a ordem das unidades de significado. É possível observarmos que as unidades “pagou”, “restante” e “oito prestações fixas” estão associadas, na perspectiva de Marinete, à subtração ( $-$ ), igualdade ( $=$ ) – considerando a palavra restante relacionada ao resto ou diferença de uma subtração, ou seja, o “resultado” da operação – e multiplicação por oito ( $8x$ ), respectivamente. Ainda, constatamos que as unidades de significado apresentadas no enunciado estão na mesma ordem, da esquerda para a direita, que a equação  $832,80 - 277,60 = 8x$ .

Quadro 12: Problema número 12 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P12</b>	<p><b>12</b> Antônio Carlos e Aldo foram à padaria comprar pães. No caminho de volta, Antônio Carlos comeu um quarto dos pães e Aldo comeu dois pães. Quando chegaram em casa, havia apenas sete pães na sacola. Quantos pães eles compraram?</p>		<b>Critério</b>	
			<b>A</b>	✘
			<b>B</b>	✓
			<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

Este problema não conserva a correspondência semântica entre as unidades de significado uma vez que a unidade significante “um quarto” possui dois signos enquanto que na representação algébrica a fração  $\frac{1}{4}$  possui apenas um signo, caracterizando a não conservação.

A univocidade semântica terminal é conservada, pois as expressões “comeu” e “havia” estão relacionadas à subtração e a relação de igualdade tanto na representação em língua natural, quanto na representação algébrica, por meio da equação  $x - \frac{1}{4} \cdot x - 2 = 7$ .

No que tange a ordem das unidades de significado, também conseguimos verificar que ela é conservada, pois em “[...] comeu um quarto dos pães [...] comeu dois pães. [...] havia apenas sete pães” presente no enunciado do problema, a ordem das unidades de significado é a mesma que na equação  $x - \frac{1}{4} \cdot x - 2 = 7$ , referencialmente equivalente ao problema.

Quadro 13: Problema número 13 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P13</b>	<p><b>13</b> Na minha classe há duas pessoas chamadas João, o que equivale a <math>\frac{1}{20}</math> dos alunos. Quantos alunos há na minha classe?</p>	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✓
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

O décimo terceiro problema há conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado, pois a quantidade de signos de cada uma das unidades significantes do registro de partida corresponde à mesma quantidade signos no registro de chegada. A análise feita na figura 4 para o problema 2 é análoga a relação entre enunciado e equação do problema P13.

A univocidade semântica terminal também é conservada nesse problema. A fração  $\frac{1}{20}$  e a palavra “duas”, obviamente conservam tal critério, enquanto que a palavra “equivale” é convertida para o símbolo de igualdade (=), sendo que ambos possuem apenas um signo a ser considerado. Além disso, a expressão “dos alunos” que possui dois signos está relacionada à representação “ $\cdot x$ ” que também possui dois signos.

Verifica-se claramente a conservação do critério referente à ordem das unidades de significado. É importante destacar aqui, ainda, que estamos considerando a propriedade simétrica da igualdade, ou seja, a implicação lógica  $\frac{1}{20} \cdot x = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{20} \cdot x$  é verdadeira.

Quadro 14: Problema número 14 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P14</b>	<p><b>14</b> Artur possuía uma caixa de bolinhas de gude. Deu <math>\frac{1}{5}</math> das bolinhas a seu amigo André e <math>\frac{1}{4}</math> das que sobraram a seu irmão Vítor. Restaram na caixa 30 bolinhas. Responda ao que se pede.</p> <p>a) Quantas bolinhas havia na caixa de Artur?</p> <p>b) Quem ficou com mais bolinhas: André ou Vítor?</p>	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✗
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

No item “a” desse problema, verificamos que não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, já que em “das que sobraram” temos três signos considerados, enquanto que em “ $\cdot \frac{4}{5} \cdot x$ ”, que representa tal sobra, temos quatro signos a serem considerados.

A univocidade semântica terminal é conservada nesse problema, pois as unidades de significado “deu” e “restaram” estão associadas à operação de subtração e à relação de igualdade em ambos os registros, tanto de partida quanto de chegada.

Também nesse problema é conservada a ordem das unidades de significado, já que as unidades significantes presentes no registro de partida em língua natural estão na mesma ordem das unidades significantes no registro de chegada em linguagem algébrica.

É possível resolver o item “b” desse problema utilizando o valor de “x” encontrado na resolução da equação do 1º grau com uma incógnita obtido para substituir nas expressões referentes à quantidade de bolinhas recebidas por André e Vítor. Assim, consideramos que nesse caso não há conversão de registros e sim tratamento, uma vez que o aluno irá fazer apenas alterações nas expressões numéricas para obter os resultados necessários para responder o item.

Quadro 15: Problema número 15 com análise da conservação dos critérios de congruência

<b>P15</b>	<p><b>15</b> Na escolinha de futebol de Ronaldo há cinco garotos que vieram de outras cidades para fazer parte do treino. Esses garotos representam <math>\frac{3}{15}</math> da equipe. Quantos garotos treinam futebol nessa equipe da escolinha de Ronaldo?</p> <div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%; margin-top: 10px;"></div>	<b>Critério</b>	
		<b>A</b>	✓
		<b>B</b>	✓
		<b>C</b>	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (adaptado pelos autores)

O décimo quinto e último problema analisado apresenta conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado, pois a quantidade de signos de cada uma das unidades significantes do registro de partida corresponde à mesma quantidade signos no registro de chegada. Observe que a análise feita no problema 2 por meio da figura 4 também pode ser guia para o problema 15, dada a similaridade.

A univocidade semântica terminal também é conservada nesse problema. A fração  $\frac{3}{15}$  e o natural “cinco”, obviamente conservam tal critério, já a palavra “representam” é convertida para o símbolo de igualdade (=), de modo que ambos possuem apenas um signo a ser considerado. Além disso, a expressão “da equipe” que possui dois signos está relacionada à representação “· x” que também possui dois signos.

A conservação do critério C, referente à ordem das unidades de significado é verificada nesse problema. É importante destacar aqui, também, que estamos considerando a propriedade simétrica da igualdade, ou seja, a implicação lógica  $\frac{3}{15} \cdot x = 5 \Rightarrow 5 = \frac{3}{15} \cdot x$  é verdadeira.

### Discussão da análise feita nos problemas selecionados

A tabela 1 apresentada a seguir contempla uma síntese da análise feita quanto aos critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69) que foram levados em consideração nessa pesquisa, para cada um dos problemas selecionados. De modo

análogo ao que foi realizado anteriormente, quando o problema conserva o critério de congruência considerado utilizamos o símbolo ✓, enquanto que quando o critério de congruência não é conservado utilizamos o símbolo ⊗.

Tabela 1: Síntese da análise de congruência realizada nos problemas P1 a P15

Critério de Congruência	Número do Problema Analisado														
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15
A	⊗	✓	⊗	⊗	⊗	✓	✓	⊗	⊗	⊗	✓	⊗	✓	⊗	✓
B	✓	✓	✓	✓	✓	✓	⊗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
C	⊗	✓	✓	✓	⊗	⊗	⊗	⊗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Duval (2009, p.69), ao tratar do fenômeno da congruência semântica, esclarece que “duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações”, ou seja, quando os três critérios elencados por ele são conservados há congruência entre o registro de partida e o de chegada.

Então, segundo a análise que realizamos, apenas quatro dos quinze problemas apreciados possuem a representação em língua natural congruente à equação que é referencialmente equivalente ao enunciado, sendo eles P2, P11, P13 e P15. Sete dos problemas selecionados conservaram exatamente dois dos critérios, sendo que os problemas P3, P4, P9, P10, P12 e P14 não conservaram a correspondência semântica das unidades de significado (critério A), enquanto que o problema P6 não conservou a ordem que menciona o critério C.

Os quatro problemas restantes não conservaram exatamente dois dos critérios considerados, sendo que os problemas P1, P5 e P8 não conservaram a correspondência semântica entre as unidades de significado (critério A) e à ordem das unidades de significado (critério C), enquanto que o problema P7 não conservou a univocidade semântica terminal (critério B) e nem a ordem das unidades de significado (critério C). Ainda, conforme é possível inferir, não foi apresentado nenhum problema totalmente não-congruente à representação algébrica, isto é, problemas em que os três critérios considerados não foram conservados.

Além do olhar verticalizado sobre a tabela 1, no qual nos permitiu fazer as inferências anteriores, podemos também analisa-la horizontalmente, de modo a observamos que a incidência da não conservação do critério referente à correspondência semântica das unidades de significado é alta, sendo que em nove dos quinze problemas (P1, P3, P4, P5, P8, P9, P10, P12 e P14) não se conservou o critério A. Analogamente, é possível verificar que apenas o problema P7 não conservou a univocidade semântica terminal

(critério B). A ordem das unidades de significado não foi conservada em cinco dos quinze problemas, sendo eles P1, P5, P6, P7 e P8.

Uma vez realizada tal análise mais quantitativa, buscamos elementos na teoria de dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003, 2009, 2012a, 2012b) e em resultados de pesquisas anteriores, que nos permitiram tecer algumas discussões de cunho qualitativo a respeito da utilização da teoria dos Registros de Representação Semiótica nos processos de ensino e aprendizagem.

Conforme destacado, os dados da tabela 1 nos revelaram que quatro dos quinze problemas analisados conservaram os três critérios, isto é, segundo Duval (2009, p.69) são congruentes. Dessa forma, ao direcionarmos nosso olhar para eles, verificamos que os problemas P2, P13 e P15 apresentam estrutura de problemas bastante similares, diferenciando-se substancialmente pelo contexto. Os três problemas podem ser resolvidos utilizando-se das mesmas estratégias, sendo elas por meio do conceito de fração ou pela estruturação de uma equação. Já o problema P11 apresenta uma situação comercial envolvendo a compra de um produto dada à entrada e a quantidade de prestações para o valor restante.

Ao menos dois fatores podem contribuir para o sucesso dos alunos na resolução desses problemas, sendo que o primeiro deles refere-se às experiências anteriores dos alunos com tais conteúdos. No material didático do 6º ano do Ensino Fundamental da mesma coleção que analisamos é dada bastante ênfase ao estudo das frações, bem como aos problemas envolvendo tal conceito, de modo que problemas similares à P2, P13 e P15 aparecem com razoável frequência. Além disso, ainda no 6º ano, os números decimais são objeto de estudo e nessa etapa figuram problemas análogos ao P11. Como os alunos idealmente já tiveram um primeiro contato com tais tipos de problemas, algumas dificuldades já devem ter sido superadas e, pela familiaridade adquirida, tais problemas podem ser adequados para uma discussão inicial a respeito da utilização da Álgebra, por meio de equações. Todavia, somente em uma situação real de sala de aula que, após avaliação diagnóstica do professor, poderá ser comprovada essa hipótese que apresentamos *a priori*.

O segundo fator que contribui para o sucesso dos alunos nesses quatro problemas é justamente o fato de eles serem congruentes, quando consideradas a representação em língua natural e representação algébrica, por meio de equações do 1º grau com uma incógnita.

Os dados da tabela 1 também apontaram sete problemas que não conservaram apenas um dos critérios de congruência. Desses, os problemas P3, P12 e P14 possuem números pertencentes ao conjunto dos números racionais escritos usando a representação fracionária e a representação decimal; o problema P10 apresenta números no formato

percentual; e os problemas P4 e P9 apresentam apenas números pertencentes ao conjunto dos números inteiros. Assim, como para todos esses seis problemas o critério da correspondência semântica das unidades de significado é que não foi conservado, o que determina o nível de dificuldade nesse ou naquele problema é, possivelmente, o conjunto onde estão inseridos os dados e o contexto em que se passa a situação.

Para os problemas que não conservaram a correspondência semântica das unidades de significado destacamos ser necessário desenvolver investigações específicas sobre esses tipos de problemas, categorizando-os de forma similar ao que fizeram Costa (2010) e Silva (2011), para que seja possível verificar quais tipos de registros são mobilizados pelos alunos em função do critério não conservado, bem como avaliar a taxa de sucesso na conversão, tanto para o registro algébrico quanto para os demais registros mobilizados. Assim, esse fato aponta para a necessidade de pesquisas futuras que ampliem o que fora discutido nos trabalhos de Costa (2010) e Silva (2011). Segundo o nosso levantamento, no cenário nacional há uma carência de pesquisas que contemplem tais indagações.

O problema P6 também não conservou apenas um dos critérios, sendo este o referente à ordem das unidades de significado. Esse, porém, é um problema que se distingue dos demais, uma vez que é o único problema que traz um contexto geométrico. Duval (2012a, p.124) destaca que ao construir uma figura, após leitura de um enunciado, os alunos apresentam a atitude de não retornar ao enunciado da questão. No entanto, ainda de acordo Duval, destacamos que pelo fato da figura 6 se tratar de uma figura semanticamente congruente ao enunciado esse caminho é acessível aos alunos, sendo que a não interpretação discursiva da figura dificilmente implicará dificuldades nessa situação.

Os problemas P1 e P5 que conservaram apenas a univocidade semântica terminal, diferenciam-se de contexto, embora ambos trabalhem com números naturais. O problema P1 lança mão de conceitos relativos a números consecutivos enquanto que o problema P5 não necessita de um pré-requisito bastante específico como o conceito de consecutivo, porém um obstáculo a ser superado pelo aluno certamente será o jogo de palavras característico muitas vezes da língua natural.

O problema P8 é do tipo partilha, conforme categorizou Costa (2010) em seu trabalho, porém ele se difere dos problemas analisados por ele, pois no delineamento de sua pesquisa considerou os problemas de partilha no qual tem um desencadeamento tipo fonte, enquanto que o problema P8 tem desencadeamento do tipo composição. Nos problemas com encadeamento tipo fonte, as relações são construídas a partir de uma única fonte, por exemplo: “Três irmãos, Pedro, Toni e Carlos, possuem 17 selos. Pedro possui cinco selos a mais que Toni e Carlos, o triplo de Toni. Quanto selos possuem

cada um dos irmãos?” (COSTA, 2010, p.35). Já nos problemas de tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência. No problema P8, partindo da quantidade selos de Marcos obtemos a quantidade de selos de Lucas e, a partir desse, obtemos a quantidade de selos de Samir.

Segundo as análises de Silva (2011), a leitura dos dados tratados no *software* CHIC indicaram que, em se tratando dos problemas de partilha com desencadeamento tipo fonte, “o único fator que parece interferir no emprego do registro algébrico na conversão dos problemas propostos é a correspondência semântica das unidades de significado” (SILVA, 2011, p.66). Assim, dada a similaridade entre os problemas tratados por esse autor e o problema P8, supomos que haja proximidade nos resultados, isto é, os alunos podem não recorrer ao registro algébrico para fazer tal problema, em princípio. Todavia, uma investigação específica com esse tipo de problema necessita ser feita para confirmação/refutação de tal hipótese.

O problema P7 não conservou os critérios B e C, sendo este o único a não conservar a univocidade semântica terminal, de acordo com nossa análise. Tal problema se assemelha em contexto com o problema P11, porém a forma com que os dados são dispostos influencia fortemente na conversão de registro. Inclusive o problema P11 é totalmente congruente, já P7 não.

Assim, do que destacamos até o momento duas questões muito importantes emergem: (i) como decidir qual critério não conservado influencia mais na conversão de registros e quais os erros mais frequentes que se originariam em decorrência disso? (ii) Qual a influência do conjunto no qual os dados são retirados (natural, inteiro ou racional)?

Com os dados desse trabalho não foi possível responder a tais questões, pois seria necessário elaborar problemas fixando algumas variáveis e alterando apenas os critérios conservados como fizeram Costa (2010) e Silva (2011) para os problemas de partilha, bem como elaborar problemas com os critérios elencados por Duval (2009) fixados e variar o contexto numérico. Após isso, a aplicação desses problemas de forma organizada e sistematizada pode apontar direções para as respostas a tais questões. Em suma, o que queremos dizer é que dada a não conservação dos mesmos critérios em diversos problemas aqui considerados, não temos elementos suficientes para afirmar que este ou aquele problema é mais custoso cognitivamente para o aluno responder.

Entretanto, a teoria dos Registros de Representação Semiótica nos fornece elementos para afirmar que “a dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não congruência entre a representação de partida e a representação de chegada” (DUVAL, 2009, p.69). Nesse sentido, em outro trabalho Duval destaca que:

O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva

entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado, e também de não ser efetuado ou entendido. (DUVAL, 2012b, p.105)

Do que foi destacado acima, inferimos que quanto mais critérios não são conservados na conversão entre o registro em língua natural e o registro algébrico, por meio de equações do 1º grau, maior é o custo cognitivo para fazer a conversão. E mais ainda, dependendo da situação, o aluno pode não conseguir fazer tal conversão de forma correta, isto é, não conseguir obter uma equação que seja referencialmente equivalente ao problema. Ocorre que o funcionamento natural do pensamento tende a seguir a congruência semântica entre enunciado em língua natural e representação algébrica e em matemática importa a equivalência referencial.

Duval (2009, p.69) referindo-se à conservação da ordem das unidades de significado destaca que “esse critério é, sobretudo, importante quando se trata de comparar frases e fórmulas literais”. Isso permite nos dizer que uma atenção especial deve ser dada aos problemas P1, P5, P6, P7 e P8 já que nenhum deles conservou tal critério. É frequente encontrarmos soluções incorretas contendo expressões literais seguindo a ordem do enunciado e não considerando a equivalência referencial. Sobre esse fato, consideremos trecho a seguir:

Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos na aprendizagem de matemática está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica. (DUVAL, 2012b, p. 101)

Isso nos remete ao trabalho de Gil (2008) que destacou o problema da interpretação ao se referir ao insucesso dos alunos ao converterem da língua natural para a linguagem algébrica. A não interpretação está ligada ao referido obstáculo acima e, como já havíamos nos posicionado, isso depende do grau de não congruência.

Então, no que tange aos problemas considerados nesse trabalho, podemos agrupá-los considerando três categorias: (1) os que conservam todos os critérios; (2) os que conservam dois critérios; (3) os que conservam apenas um critério. De acordo com essa categorização e em consonância com o que foi apontado pela teoria considerada, o custo cognitivo vai aumentando da esquerda para direita à medida que temos mais critérios não conservados: (1) → (2) → (3).

Mas as duas outras questões mais específicas que se construíram durante as discussões que nos propusemos a fazer nos limitam em afirmar exatamente quais tipos de registros serão mobilizados pelos alunos nos problemas do grupo (1), grupo (2) ou grupo (3) separadamente, bem como as dificuldades inerentes a conversão, em função dos



critérios não conservados. Assim, como supramencionamos, pesquisas com esse delineamento contribuiriam para minimizar esse impasse.

Apontamos, então, a necessidade de ampliar as discussões a esse respeito, sendo que um possível direcionamento para pesquisas futuras é: (i) verificar quais tipos de problemas com equações do 1º grau são privilegiados nos livros didáticos do 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), verificando quais são mais frequentes; (ii) De posse dos conhecimentos do direcionamento (i), investigar qual a influência do tipo de problema para cada um dos critérios de congruência conservados, bem como a influência dos critérios não conservados para cada um dos problemas; (iii) investigar em que medida a estrutura dos problemas baseados em fatores de congruência podem conduzir os alunos a determinados registros na resolução dos problemas envolvendo equações do primeiro grau.

Portanto, por meio da análise realizada em cada um dos problemas em termos de congruência, da tabela síntese de tal análise (tabela 1) e das discussões realizadas anteriormente, consideramos respondidas nossas questões de investigação, bem como atingido nosso objetivo de pesquisa. Assim, encerramos o relato desse trabalho com a sensação de ter contribuído, dentro dos limites dessa investigação, para as pesquisas em Educação Matemática, sobretudo para a formação inicial e continuada de professores de matemática quanto à utilização da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

## Referências

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C.; MORETTI, M. T. *Registros de representações semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências*. Zetetiké, Campinas, v.16, n.29, p.41 – 72, 2008.

COSTA, W. R. *Investigando a conversão da escrita natural para os registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau*. 2010. 107f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

DUVAL, Raymond. *Registres de representation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strabourg, IREM-ULP, França, v.5, 1993, p.37-64.

DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, R. *Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência*. Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat). Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, R. *Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência*. Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat). Florianópolis, v.7, n.1, p.97-117, 2012b.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. *Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica*. Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana, v.4, n.2, 14 p, 2013.

GIL, K. H. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra*. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Rio Grande do Sul: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2008.

LAJOLO, M. *Livro didático: um (quase) manual de usuário*. Em aberto: livro didático e qualidade de ensino. Brasília, ano 16, n.69, p.3-9, jan./mar. 1996.

SILVA, M. L. L. da. *Investigando estratégias mobilizadas pelos alunos no equacionamento de problemas de primeiro grau*. 2011. 87f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.