

O CONCEITO DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA VIA REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Paulo César Oliveira¹
Rogério Fernando Pires²

Resumo

O presente estudo teve por objetivo investigar que categorias de registros escritos são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos com atividades matemáticas relativas ao pensamento funcional, tendo como principal referencial teórico as ideias da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. O estudo que consistiu na aplicação e posterior análise das atividades que compuseram uma sequência didática. A investigação foi realizada com um grupo constituído de 38 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual, localizada na cidade de Pilar do Sul, interior de São Paulo. Os resultados encontrados após a análise da produção de informações revelam que os registros mais utilizados foram os multifuncionais de representação discursiva e os registros monofuncionais de representação discursiva e, ainda que as relações entre a congruência e não-congruência das representações de um objeto matemático, delimitam a compreensão do mesmo.

Palavras-chave: Registros de Representação; Sequência didática; Função; Fenômenos de congruência e não-congruência; Educação Básica

1 INTRODUÇÃO

O estudo que apresentamos é uma reflexão de um processo de investigação que teve como objetivo compreender a multiplicidade de representações matemáticas relativas ao conceito de função em um contexto escolar de um nono ano do Ensino Fundamental; mais

¹ Paulo César Oliveira - Avenida Grota Azul, 280 - Chácaras Grota Azul – Hortolândia (SP) – 13188-117 – (19)38453494, paulooliveira@ufscar.br – Doutor em Educação Matemática – Professor adjunto do Departamento de Física, Química e Matemática da UFSCar (Campus Sorocaba)

² Rogério Fernando Pires - Rodovia João Leme Dos Santos, Km 110 - SP 264 – Itinga – Sorocaba (SP) - 18052-780 - (15)32295963 - rfpires25@bol.com.br – Doutorando em Educação Matemática – Professor substituto do Departamento de Física, Química e Matemática da UFSCar (Campus Sorocaba)

especificamente, a classificação dos diferentes registros de representação semiótica, bem como a coordenação dos mesmos (análise do fenômeno de congruência).

A construção do percurso teórico-metodológico desta pesquisa teve seu marco inicial na leitura de relatos de pesquisas como de Bassoi (2006), Silva (2008) e Argendhi (2008), dentre outras, cujos resultados da análise da produção de informações alertam para a utilização de múltiplas representações pode contribuir significativamente na aprendizagem do tema função.

Com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003) para o desenvolvimento cognitivo do aluno na aprendizagem de um objeto matemático, foi elaborado o problema que desencadeou esta investigação: que categorias de registros escritos são mobilizadas por alunos do nono ano do Ensino Fundamental envolvidos com atividades matemáticas relativas ao pensamento funcional?

A continuidade desta redação tem por objetivo envolver o leitor com a descrição de trilhas construídas pelos pesquisadores na busca de repostas ao questionamento que impulsionou a realização deste trabalho. As mesmas perpassam pela orientação curricular dada ao ensino de função, os aportes teóricos de Raymond Duval e suas aplicabilidades em algumas pesquisas acadêmicas e; o delineamento metodológico para a produção e análise de informações obtidas no processo empírico da investigação.

2 ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O CONCEITO DE FUNÇÃO

Para os propósitos deste texto é condição necessária e suficiente situarmos no currículo da educação brasileira, tanto do Ensino Fundamental quanto Ensino Médio, o estudo das relações funcionais tomando por base a relação que professor e alunos estabelecem com este saber matemático via resolução de problemas.

A seleção de conteúdos organizados em blocos como Números e Operações contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) para o terceiro ciclo (atual 6º e 7º ano) do Ensino Fundamental, teve como propósito a exploração da noção de função por meio de atividades algébricas envolvendo a generalização a partir de padrões aritméticos, tabelas e gráficos; o estudo da variação de grandezas possibilitando a diferenciação entre incógnita e variável. Neste mesmo documento, a análise da interdependência entre grandezas bem como sua representação algébrica é potencial em conteúdos pertinentes ao bloco denominado Grandezas e Medidas.

Para os dois últimos anos desse segmento escolar, o desenvolvimento do pensamento algébrico tem como ponto de partida a pré-álgebra desenvolvida no ciclo anterior (atual 6º e 7º ano). A exploração de situações de aprendizagem envolvendo o raciocínio proporcional deve dar condições ao aluno “de representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional” (Brasil, 1998, p.82). É o caso, por exemplo, das variações do perímetro e da área de um retângulo em relação à variação da medida do lado.

No que diz respeito ao conjunto dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM, a aprendizagem do aluno deve ser ampliada para a continuidade do desenvolvimento de capacidades como “abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade” (Brasil, 2000, p.41).

Especificamente ao tema funções o mesmo não pode ser desenvolvido isoladamente, devido ao seu caráter integrador; tanto nas conexões internas à própria matemática quanto na análise de comportamentos de fenômenos articulados a outras áreas do conhecimento.

Quanto ao primeiro aspecto, destaca-se a representação gráfica das funções trigonométricas bem como o estudo das propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica; comuns às propriedades gráficas das funções afim e quadrática. A representação algébrica da lei de formação de sequências numéricas como progressões aritméticas e geométricas, assim como o aproveitamento do estudo de polinômios e equações algébricas no estudo de funções polinomiais também são possibilidades de integração interna à Matemática.

No que diz respeito ao caráter integrador com outras áreas do conhecimento destaca-se a análise da possibilidade de construir relações de dependências entre variáveis (Brasil, 2000).

O documento Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+(Brasil, 2002) contém uma distribuição de temas e suas respectivas unidades temáticas levando em conta o seu desenvolvimento contínuo e gradativo no decorrer das três séries do Ensino Médio.

No caso de funções, basicamente o que é possível de ser desenvolvido com conexões internas à Matemática sugere-se que seja tratado ao longo das duas primeiras séries e as taxas de variação de grandezas como forma de construção de relações de dependência entre variáveis na terceira série.

O documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (Brasil, 2006, p.70) produzido com a intenção de apresentar um conjunto de reflexões que alimente a prática docente, em questão de conteúdo, partiu do “princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o pensar matematicamente”.

Neste sentido, o tema funções passou a ser um dos quatro blocos constituídos para serem articulados entre si e que contém um conjunto de conteúdos básicos. A apresentação dos conteúdos básicos deste bloco converge com o que já foi mencionado sobre os outros documentos curriculares, porém, a sua forma de apresentação permite a reflexão sobre como proporcionar ao aluno um “fazer matemática” de modo que o mesmo estabeleça relações com o saber por meio de suas representações.

A partir da sistematização da Proposta Curricular para o Estado de São Paulo (São Paulo, 2008, p.44) a Matemática como componente curricular, apresenta-se como “um sistema de símbolos diretamente articulada com a língua materna, tanto na forma oral como na escrita, bem como outras linguagens e recursos de representação da realidade”.

No quadro de conteúdos distribuídos ao longo das séries finais do Ensino Fundamental (atual 6º ao 9º ano) e para as três séries do Ensino Médio e, por bimestres, observa-se a abordagem para funções em três momentos específicos. Inicialmente, no 2º bimestre do 9º ano, contemplando as seguintes ideias fundamentais: noções básicas, variação e construção de tabelas e gráficos para funções afim e quadrática.

Posteriormente retoma-se o estudo de funções ao longo do 2º e 3º bimestres da 1ª série do Ensino Médio com foco na relação entre duas grandezas, proporcionalidade (direta, inversa, direta com o quadrado), função afim e quadrática, função exponencial (análise de crescimento, equações e inequações) e logarítmica (equações e inequações).

Finalmente, o estudo de funções é concluído no 3º bimestre da 3ª série com ênfase na qualidade das funções, gráficos (funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomial, análise de sinal, crescimento e taxa de variação), composição (translações e reflexões) e função inversa. É necessário ressaltar que a ideia fundamental de qualidade das funções gera dúvidas quanto ao seu foco. Para amenizar a subjetividade no conteúdo desta forma escrita, recorreremos às Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006, p.72) para expor nossa compreensão: “estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura”.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008, p.51) há a justificativa de que “a explicitação, em cada um dos bimestres, dos conteúdos e das ideias fundamentais, tem apenas o objetivo de destacar o foco principal das atenções, deixando-se subentendido que praticamente todos os outros conteúdos e ideias são coadjuvantes em todos os momentos”.

Para o estudo de funções basicamente este documento contempla uma única ideia fundamental que é a proporcionalidade. Na apresentação dos conteúdos disciplinares de matemática, agrupados em blocos temáticos, a proporcionalidade é citada primeiramente no eixo denominado grandezas e medidas. Neste documento (São Paulo, 2008, p.47) é proposto “uma investigação da relação entre grandezas, o que abre portas para um estudo mais sistematizado das funções, (...) como, as relações que associam uma potência com seu expoente, um arco com sua tangente, um número com seu cubo, etc”.

Como orientação para ensino das ideias fundamentais, desde a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (São Paulo, 2008, p.49) “associa-se o tema proporcionalidade com o estudo das funções linear e afim, seja em contexto puramente matemático ou aplicado ao estudo da cinemática apresentado na Física”. Para o professor fica a tarefa de adequar a formalização da linguagem e a rede de significados que se pretende estabelecer.

O conhecimento como rede de significados, na concepção de Machado (1996) constituídas individual e socialmente, em permanente estado de atualização, dar-se-á não a partir de um centro determinante de desenvolvimento, mas a partir de focos de interesse.

Na posição de coordenador da área de Matemática para o desenvolvimento dos conteúdos programáticos da Proposta Curricular para o Estado de São Paulo (2008), Nilson José Machado elegeu a proporcionalidade como centro determinante de desenvolvimento do pensamento funcional; ao invés de contemplar a multiplicidade de suas representações, proporcionando ao aluno a capacidade do desenvolvimento de percepções, generalizações e conexões internas à matemática e com outras áreas do conhecimento; conforme prescrição dada pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006).

O tratamento que foi dado ao conteúdo programático de funções no nono ano do Ensino fundamental neste relato de pesquisa, por meio da aplicação e análise do desempenho das sequências didáticas, considerou a relação que o estudante estabeleceu com o saber construído a partir da multiplicidade de representações.

3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As ideias da teoria do psicólogo e filósofo Raymond Duval, buscam compreender, na relação do aluno com o objeto matemático, possíveis dificuldades de ordem cognitiva decorrente do processo de aprendizagem, pois um mesmo objeto possui diferentes formas de representação.

Para este pesquisador, aprender matemática está condicionado ao ato de representar, tratar e converter registros de representação semiótica num determinado nível cognitivo. Para Duval (2003) a abordagem cognitiva tem por finalidade, em seu início, procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar, ele próprio, a diversidade do fazer matemático (atividade matemática) que lhe é proposto em situação de aprendizagem.

Na perspectiva de Duval (2003) a atividade matemática, em um processo de aprendizagem, exige a coordenação de pelo menos dois registros de representação; manifestada pela possibilidade de efetuar transformações de conversão nos registros semióticos. A mudança e coordenação dos registros ocorrem por meio da transformação das representações de tratamento, além da citada conversão.

As transformações de tratamento conservam o registro de partida e de chegada, não havendo mudanças de registros de representação no decorrer da atividade matemática. Corresponde às justificativas para um determinado problema, em busca do melhor registro de representação a ser utilizado; favorável à aprendizagem do aluno. É o caso de classificar o crescimento, decrescimento de uma função polinomial do 1º grau a partir do valor do coeficiente angular, posicionamento da reta no gráfico ou pelo comportamento das variáveis; cujos valores numéricos podem dispostos em uma tabela ou por meio de pares ordenados.

As transformações de conversão consistem em mudar o conteúdo da representação, mas conservando-se a referência aos mesmos objetos, como é o caso da representação gráfica da reta a partir da sua equação. Porém, esta mudança

(...) enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato dos alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada (DUVAL, 2003, p.15).

Nesta perspectiva, convém ressaltar que uma conversão é congruente quando acontece de maneira quase que imediata, sendo possível observar em ambos os sentidos da conversão uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes de partida e de chegada. Agora quando a conversão não acontece dessa maneira, sendo que as unidades significantes não são suficientes para efetuar a conversão de maneira imediata, ocorre o fenômeno de não congruência.

Portanto, para determinar se duas representações são congruentes ou não, é necessário segmentá-las em unidades significantes de tal forma que seja possível colocá-las em correspondência.

Os diferentes tipos de registros de representação foram organizados por Duval (2003) da seguinte forma: registros multifuncionais (o seu processo interno de transformação não utiliza algoritmos) e registros monofuncionais que, ao contrário da primeira categoria, usufrui em seu tratamento, dos algoritmos. Para cada uma destas duas categorias, há um novo agrupamento de registros, levando em conta o fato de conter uma representação discursiva ou não-discursiva.

No caso dos registros multifuncionais agrupamos a língua natural e as formas de raciocínio como argumentações escritas ou deduções válidas a partir de definições ou teoremas como tipos de representações discursivas. Já as figuras unidimensionais, planas ou tridimensionais, assim como as construções geométricas são tipos de registros multifuncionais cuja representação não é discursiva.

Na categoria de registros monofuncionais agrupamos, segundo Duval (2003), os diferentes sistemas de escrita matemática (numérica, algébrica e simbólica) como forma de representação discursiva. Já os gráficos cartesianos, incluindo suas variabilidades são tipos de registros monofuncionais cuja representação é não-discursiva.

4 A UTILIZAÇÃO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Por ser um tema que oferece um vasto campo a ser explorado, diversas investigações relacionadas ao conceito de função vem sendo realizadas nos últimos anos. Dentre esses diversos estudos, destacamos a dissertação de mestrado de Argendhi (2008). A partir de um estudo na modalidade estado da arte; cujo caráter bibliográfico visa discutir uma determinada produção acadêmica, o autor analisou essencialmente teses e dissertações produzidas no

Brasil, no período de 1970 a 2005. Do total de 46 produções, 9 delas foram analisadas com maior profundidade; devido à questão que norteou a pesquisa. Este grupo de 9 trabalhos defendidos entre 1994 e 2003, revela dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de função nos diferentes níveis de escolaridades, bem como possibilidades ou alternativas para superação ou minimização deste déficit.

Argendhi (2008) apresenta vários resultados de sua análise bibliográfica, porém, destacamos três deles relevantes à construção da problemática deste relato de pesquisa: a noção de função é apresentada pela maioria dos professores, assim como em livros didáticos, numa linguagem técnica e distante da realidade do aluno. Um segundo resultado conduz à reflexão de que os obstáculos de aprendizagem podem ser gerados pelo desfavorecimento das conversões nos registros de representação. Finalmente ressaltamos que quase a totalidade dos trabalhos focalizou separadamente alunos e professor, não articulando a explicitação de significados para o conceito de função, no movimento de produção e negociação entre aluno-aluno, aluno-professor e acadêmico-professor.

A leitura e análise de duas outras produções acadêmicas também contribuíram na construção do nosso percurso teórico-metodológico.

A tese de doutorado de Bassoi (2006) teve como objetivo identificar e analisar os registros de representação semiótica usados por uma professora e seus alunos de 8ª série, em aulas de matemática sobre funções, em uma escola municipal da periferia de Curitiba.

Após revisão de literatura do campo da Psicologia Cognitiva sobre as relações entre conceito e representação, adotou-se como referência teórica os trabalhos produzidos por Raymond Duval. Tal escolha é justificada pelo fato de defender que a compreensão em matemática passa pela distinção entre o objeto matemático e a diversidade de suas representações e supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica.

Como método de pesquisa optou-se por uma observação natural do ambiente escolar. A pesquisadora entrevistou a professora, acompanhou, gravou e anotou os registros produzidos por ela e seus alunos, em aulas sobre funções afim e quadrática de 1º e 2º grau.

Da análise dos registros de representação produzidos, cabe ressaltar que a professora empenhou-se em trabalhar com diferentes registros de representação destacando sempre o objeto matemático em questão.

A linguagem matemática foi utilizada por ela como elemento catalisador que permeou todos os momentos de ensino, porém não se resumiu à linguagem matemática escrita. O ponto de partida foi o uso de uma linguagem matemática oral, fundada na linguagem natural dos

alunos, o que permitiu à professora estabelecer congruência entre a diversidade de escritas matemática para um mesmo objeto, principalmente quando os tratamentos com a escrita algébrica pareciam não fazer sentido para os alunos.

Como conclusão pode-se destacar que devido à diversidade de representações do mesmo objeto matemático, ocorreu o uso de diferentes registros de representação, não só para tratamentos do mesmo objeto, mas principalmente na conversão de registros nas diferentes formas de linguagem (natural, aritmética, algébrica, entre outras).

Estas transformações nos registros de representação auxiliaram na caracterização do objeto matemático e tiveram um papel relevante na compreensão dos alunos.

Já o trabalho de mestrado de Silva (2008) investigou de que forma o material implementado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, no ano de 2008 e intitulado de “Jornal do aluno”, propôs atividades introdutórias para o ensino de funções aos alunos do último ano do Ensino Fundamental.

Na análise das atividades contidas nesse material, o conceito de função não era objeto de ensino, inclusive a relação entre dois conjuntos numéricos. Porém, ao proporcionar a aprendizagem da noção de função de forma implícita, conceitos fundamentais como variação e interdependência entre variáveis estavam envolvidos nas atividades analisadas.

Os registros de partida, ou seja, aqueles em que as atividades foram apresentadas são: escrita na língua natural ou numérica, tabelas ou figuras geométricas. Para alguns itens analisados das atividades observou-se mais de uma possibilidade de resolução por parte dos alunos. Em decorrência disto, foram considerados diferentes tipos de registros de chegada para os mesmos itens.

As transformações dos registros favorecem tanto as conversões mais do tipo congruente do que não-congruente, quanto os tratamentos. Para pesquisas futuras, Silva (2008) sugere a aplicação das atividades analisadas em sua pesquisa para avaliar se realmente os alunos utilizarão as estratégias elencadas, ou se na resolução manifestam outras transformações nos registros.

Dada a natureza da produção deste texto, não apresentamos uma revisão bibliográfica do tema; porém a intenção é permitir que o leitor compreenda a construção do nosso objeto de investigação.

Nas produções acadêmicas aqui descritas é comum a potencialidade nas múltiplas de representações nas atividades matemáticas, em especial, do objeto função. Para melhor

compreender o papel da diversidade das representações matemáticas na construção do conceito de função, resgatamos um artigo produzido por Mendonça e Oliveira (1999).

Para esses pesquisadores o conhecimento matemático mostra-se como algo estático quando observamos as definições e propriedades de tópicos matemáticos inseridos nos livros de texto, como coisas cristalizadas e imutáveis; resultados que uma vez obtidos, somam-se uns aos outros, formando blocos justapostos de informações.

A realidade, entretanto, é outra. Olhando na perspectiva de uma análise histórica, adentramos num processo dinâmico quanto à observação de erros e acertos na construção de um determinado fato matemático, reconhecemos a interdependência dos resultados, os quais, muitas vezes, impossibilitam o estabelecimento de fronteiras entre as várias áreas que constituem o conhecimento matemático. Não obstante, os conceitos se transformam lento e gradualmente, de modo quase sempre não linear, num processo subordinado às necessidades do corpo científico e à sociedade.

Na década de 90, diversos pesquisadores da educação matemática como Tall (1992), Markovits, Eylon & Burckheimer (1995) e Fernandes (1998), por exemplo, envolveram-se em investigações sobre o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, as quais eram, em geral, justificadas pela variedade de noções que envolvem este conceito matemático.

Ardenghi (2006) também analisou esta publicação devido a sua relevância no cenário da Educação Matemática. Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) investigaram dificuldades e concepções errôneas de alunos americanos, de nona e décima série na educação básica, na tentativa de determinar as causas desses erros para tentar superá-los. Estes pesquisadores concluíram em seus estudos que os alunos têm mais facilidade em lidar com funções na representação gráfica do que algébrica e sugerem inversão nos estudos, iniciando com as representações gráficas. Remetendo para o contexto da teoria de Duval (2003), esta inversão de estudos é um exemplo de congruência tratada numa perspectiva de duplo sentido. Finalmente, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) recomendam levar em conta um contexto histórico no ensino do conceito de função.

Mendonça e Oliveira (1999) partem do pressuposto que o professor como mediador do processo educativo, com suas crenças, concepções, valores e representações sobre os fatos matemáticos, se indagado sobre “o que é função?”, possivelmente terá uma multiplicidade de respostas tais como: fórmula, subconjunto do produto cartesiano, previsão, gráfico, variação, transformação, interdependência entre grandezas, raciocínio indutivo, visão só algébrica ($y = f(x)$).

Uma pedagogia da matemática para o desenvolvimento do pensamento funcional deve levar em conta, segundo Mendonça e Oliveira (1999), três aspectos.

O primeiro diz respeito à dificuldade de compreensão do conceito de função, pelo aluno, devido às suas múltiplas representações. Um conhecimento associado a um conceito é estável no indivíduo, se este pode articular as diferentes representações do conceito sem contradições.

O segundo aspecto refere-se à ideia de conhecimento como rede de significados, os quais constituem feixes de relações que se entretecem, articulando-se em teias. Dentro da concepção de Machado (1996) que reconhece a articulação de tais redes, constituídas individual e socialmente, em permanente estado de atualização, a construção do conhecimento matemático como rede dar-se-á não a partir de um centro determinante de desenvolvimento, mas a partir de focos de interesse. Nesta perspectiva, estaremos apontando diferentes focos de interesse tendo por base aqueles revelados a partir da indagação do que é função; como desencadeadores da aprendizagem das funções matemáticas.

O terceiro ponto refere-se ao ensino por meio da resolução de problemas, que tem no seu âmago a preocupação de motivar o aluno a agir ativamente frente a situações novas, ou seja, frente a problemas apresentados pelo professor ou gerados da realidade social.

A construção do problema de pesquisa levou em conta a diversidade de representações e a necessidade de mobilização das mesmas na aprendizagem do conceito de função. Com foco no 9º ano do Ensino Fundamental II, elaboramos duas indagações: que categorias de representações semióticas são mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II? A relação de congruência e não congruência entre registros de representação de um determinado objeto pode ser algo que delimita a sua compreensão?

5 DELINEAMENTO METODOLÓGICO

O contexto de nossa investigação envolveu aspectos específicos da aprendizagem do conceito de função, via registros escritos de alunos, o que qualificou a opção por uma pesquisa de natureza qualitativa.

A produção descritiva das informações envolveu a aplicação de uma sequência didática de três atividades extraídas do artigo de Mendonça e Oliveira (1999), para estudantes de uma escola pública da rede estadual, no município de Pilar do Sul (SP).

No cenário educacional desta cidade, a unidade escolar em questão, foi a única que apresentou bons resultados em avaliações externas; como a Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas, o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O público estudantil em 2009 dessa escola era de aproximadamente 1160 pessoas. A escola ainda conta com uma biblioteca com um grande acervo de livros, sala de informática, laboratório de ciências, além de recursos audiovisuais.

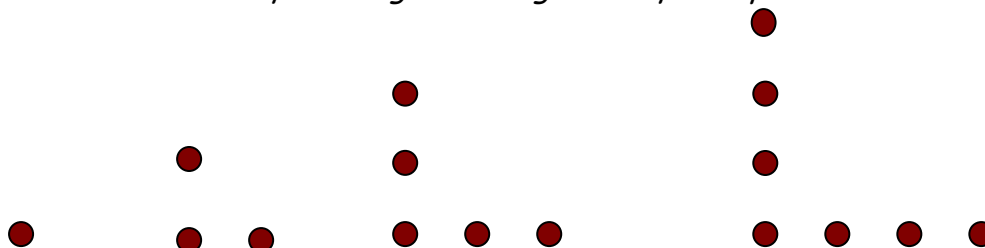
A familiaridade do primeiro pesquisador com essa comunidade escolar devido ao cargo de Supervisor de Estágio em uma Instituição de Ensino Superior, facilitou a constituição de uma parceria junto a uma professora responsável pelas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, para a aplicação da sequência didática de atividades. Este entrosamento também contribuiu na decisão do melhor momento para a inserção das atividades no cotidiano escolar de 40 alunos de uma determinada classe do período matutino, já que os mesmos estavam iniciando o estudo de funções.

6 ATIVIDADES E A ANÁLISE A PRIORI DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Na sequência apresentamos o enunciado de cada atividade nomeada por A1, A2 e A3, bem como o potencial de exploração dos registros de representação semiótica.

6.1 Sequência - Lei da formação (A1)

Observe as quatro figuras a seguir e o que se pede:



a) Desenhe a 5ª figura da sequência.

b) Quantos pontos serão necessários para formar o 8º elemento da sequência? É possível determinar o 10º termo, sem conhecer o nono?

c) Escreva uma sentença matemática que relacione o número de pontos e sua respectiva posição na formação da sequência.³

A resolução dos itens desta questão pode desenvolver a conversão de uma sequência escrita na forma geométrica para uma expressão geral ou lei de formação, válida para todos os seus termos expressa na forma algébrica. Também nos dá a possibilidade de verificação se um objeto matemático, após a sua conversão para outro tipo de registro, pode se tornar de fácil entendimento ao aluno, pelo fato destes objetos serem congruentes.

6.2 Relação de dependência entre grandezas (A2)

a) Desenhe numa folha de papel quadriculado retângulos diferentes de 64 unidades de área (u.a) cada um.

b) Na figura a seguir, a e b representam as medidas dos lados do retângulo, A representa a área e P o perímetro. Complete a tabela:

a	b	A	P

c) Qual o retângulo de menor perímetro?

d) Escreva a sentença matemática que expressa a área de retângulos de 64 ua.

e) As grandezas a e b são diretamente ou inversamente proporcionais? Por quê?

f) Os retângulos construídos são semelhantes? Por quê?

Nesta atividade procura-se desenvolver com o aluno a habilidade de percepção da relação funcional existente no cálculo de área e perímetro de polígonos regulares, a partir da proporcionalidade direta ou inversa entre as variáveis.

A possibilidade de deduzir a lei de formação para o cálculo da área de retângulos, em termos de registros de representação semiótica, pode envolver a conversão da linguagem numérica para a algébrica.

³ Utilizaremos para transcrições de questões ou dados fonte Comic Sans MS, corpo 11 e itálico. (Nota dos Editores).

6.3 Sequência generalizada algebricamente – Jogo dos barqueiros (A3)

Dez homens estão num barco de pesca. Há 11 lugares no barco, sendo que o sexto lugar está vazio. Qual o menor número de movimentos para que todos os pescadores sentados à frente, troquem de lugar com os de trás?

Este jogo será desenvolvido da seguinte forma: utilizando um suporte com 11 lugares alinhados de modo a permitir a localização de 10 pinos em duas cores distintas, o jogo consiste em reverter a disposição de todos os pinos de uma mesma cor para os de outra cor. O jogo terá como base a seguinte regra: cada pino só poderá deslocar-se para um lugar vizinho vazio ou “pulando” um outro pino. Assim, não é permitido pular um lugar vazio, mas é permitido dois ou mais movimentos seguidos, saltando lugares ocupados.

Após a classe desenvolver uma rodada do jogo, pedir para responder as seguintes questões:

- a) *Utilizando um par de pinos, quantos movimentos serão necessários para reverter as posições dos mesmos?*
- b) *Complete a tabela abaixo:*

<i>Pares</i>	<i>Movimento</i>
<i>1</i>	
<i>2</i>	
<i>3</i>	
<i>4</i>	
<i>5</i>	

- c) *Utilizando os dados obtidos dispostos na tabela acima, é possível descrever uma expressão que represente a lei de formação desta sequência. Represente esta expressão sendo que p representa o número de pares de pinos e m o número de movimentos mínimos.*

Neste jogo, o professor pode desenvolver o pensamento funcional utilizando-se de representações tais como a disposição de dados obtidos em tabelas e na generalização da lei de formação da sequência, sendo que o número mínimo de movimentos está em função dos números de par de pinos. Em concordância com Mendonça e Oliveira (1999), cabe ressaltar

que a aplicação do jogo em sala de aula pode favorecer a construção do conhecimento matemático pelo aluno, desde que haja um propósito pedagógico.

É importante enfatizar que a apresentação sucessiva das atividades **A1**, **A2** e **A3** contém um grau crescente de dificuldade.

7 PRODUÇÃO E ANÁLISE DE INFORMAÇÕES

As referidas atividades foram aplicadas para 38 (trinta e oito) estudantes, sendo 20 (vinte) meninas e 18 (dezoito) meninos. Tanto o licenciando quanto a professora estiveram à disposição para esclarecer dúvidas quanto ao contexto de cada questão, porém, sem influenciar ou intervir nos procedimentos de resolução.

Os protocolos de resolução foram recolhidos para análise de conteúdo, os quais expomos a seguir.

7.1 Análise da Sequência/Lei da formação (A1)

Essa atividade teve como proposta a utilização de uma sequência de pontos para a generalização de uma sentença matemática que relacione o número de pontos e sua respectiva posição na formação da sequência. Apresentamos abaixo um quadro quantitativo referente a esta atividade explicitando o número de respostas corretas e o número de respostas erradas apresentadas nos protocolos de registros.

Tabela 1 - Desempenho dos estudantes na primeira atividade

<i>Atividade 1</i>	<i>Total de acertos</i>	<i>Total de erros</i>
<i>Item a</i>	<i>37</i>	<i>1</i>
<i>Item b</i>	<i>27</i>	<i>11</i>
<i>Item c</i>	<i>13</i>	<i>25</i>

Fonte – Arquivo dos pesquisadores

O item **a** pede para o aluno desenhar a 5ª figura da sequência. A partir das figuras apresentadas, ele perceberia que em cada figura existem exatamente dois pontos a mais do que na anterior, então o próximo elemento da sequência ficaria com nove pontos.

O único erro obtido neste item foi apresentado pelo aluno aqui denominado como aluno 41 (número na lista de frequência), onde ele desenhou a 5ª figura composta por 8 pontos.

Para a resolução do item **b**, o aluno necessitava generalizar a relação da quantidade de pontos necessários para a construção da figura com sua posição na sequência com um registro em língua materna, utilizando-se do que em semiótica chamamos de registro multifuncional discursivo. Cabe enfatizar que a figura desenhada na sequência e o registro em língua materna são considerados objetos matemáticos congruentes em relação a sua conversão. A resposta esperada para a questão, na óptica do pesquisador, seria a seguinte: para formar o 8º elemento da sequência serão necessários 11 pontos. Sim é possível, pois trata-se de uma sequência formada apenas por números ímpares, em que basta multiplicarmos por 2 o termo equivalente na sequência e de seu resultado subtrair uma unidade.

O fato dos objetos apresentarem uma relação de congruência semântica entre suas conversões, torna-os de fácil compreensão, o que é verificado na tabela 1, onde no item **b**, o número de acertos foi bem superior ao de erros.

Expomos a seguir a transcrição de alguns protocolos de registro relativos a este item:

Figura 1 – Protocolo do aluno 19

Aluno 19

Item b: *o número multiplicado por 2 subtrair 1. São necessários 15 pontos para formar o oitavo.*

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

O aluno 19 percebeu que para a formação dos próximos termos, seria necessário multiplicar por 2 o termo equivalente na sequência e de seu resultado subtrair 1 e soube também expressá-lo na linguagem materna.

Figura 2 – Protocolo do aluno 13

Aluno 13

Item b

<i>Figura</i>	<i>Número de bolinhas</i>
<i>1</i>	<i>1 bolinha</i>
<i>2</i>	<i>3 bolinhas</i>
<i>3</i>	<i>5 bolinhas</i>

4	7 bolinhas
5	9 bolinhas
6	11 bolinhas
7	13 bolinhas
8	15 bolinhas
9	17 bolinhas
10	19 bolinhas

Resposta: Para formar o 8º elemento são necessárias 15 bolinhas. Para calcular o 10º, sem conhecer o 9º, simplesmente pega-se o número de bolinhas do 8º elemento e adiciona mais 4, porque a cada desenho aumenta 2 bolinhas.

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Em nosso ponto de vista, o habitual para a resolução desta questão seria que o aluno convertesse a sequência de pontos em uma sentença escrita em linguagem materna que é um registro multifuncional discursivo. Ao contrário do que esperávamos, o aluno 13 converteu os dados da sequência para uma tabela em linguagem numérica que é um registro monofuncional discursivo, utilizando de algoritmos para descrever cada elemento da sequência. Segundo Oliveira e Mendonça (1999, p.6), em problemas que envolvem sequências, é bastante valiosa a ideia de se trabalhar com tabelas para dispor tais dados.

No item **c**, bastava o aluno converter o objeto escrito em língua materna para a linguagem algébrica, usando da ideia que o número de pontos necessários para a construção da figura está em função à sua relativa posição na sequência. Essa conversão passaria de um registro multifuncional discursivo para um registro monofuncional discursivo. A solução correta para esse item seria $n = 2x - 1$, onde **n** representa o número de pontos e **x** a posição relativa da figura na sequência. Neste caso, os alunos não foram capazes de assimilar tal contexto. Em termos de desempenho o número de erros (25) superou o número de acertos (13).

Escolhemos um exemplo de protocolo representativo para a análise do erro, conforme transcrição a seguir:

Figura 3 – Protocolo do aluno 19

Aluno 19

Item c: $x + 2$

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Para a representação na linguagem algébrica, ele fez uso da ideia descrita para a resolução do item **a**, que consistia em pegar o total de pontos da figura anterior e adicionar duas unidades para a identificação do próximo termo.

Nesta atividade, a maioria dos alunos percebeu a congruência semântica existente entre um registro e outro, mas a maior dificuldade encontrada foi em fazer a conversão de um registro multifuncional de representação discursiva para um registro monofuncional discursivo que consiste na representação de um sistema de escrita numérica, algébrica ou simbólica.

7.2 Análise da interdependência entre grandezas e suas respectivas variações (A2)

Para iniciarmos a análise do desempenho dos estudantes nesta atividade, elaboramos um quadro quantitativo referente a esta atividade explicitando o número de respostas corretas e o número de respostas erradas apresentadas nos protocolos de registros recolhidos na data da aplicação:

Tabela 2 - Desempenho dos estudantes na segunda atividade

<i>Atividade</i>	<i>Total de acertos</i>	<i>Total de erros</i>
<i>2</i>		
<i>Item a</i>	<i>38</i>	<i>0</i>
<i>Item b</i>	<i>38</i>	<i>0</i>
<i>Item c</i>	<i>38</i>	<i>0</i>
<i>Item d</i>	<i>15</i>	<i>23</i>
<i>Item e</i>	<i>24</i>	<i>14</i>
<i>Item f</i>	<i>28</i>	<i>10</i>

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

No item **a**, propomos para o aluno desenhar diferentes retângulos (no mínimo três) com 64 unidades de área. Houve 100% de aproveitamento neste item, pois todas as respostas dadas foram válidas: 1x64, 64x1, 2x32, 32x2, 4x16, 16x4, 8x8.

No item **b**, a proposta é organizar as informações dispondo-as em uma tabela envolvendo o valor das medidas dos lados dos retângulos desenhados e suas respectivas áreas e perímetros. Assim como no item anterior, não houve erro. Já no item **c**, a leitura e

interpretação correta da tabela conduz ao retângulo de menor perímetro, que é o 8×8 . Nestes dois itens não houve erros por parte dos alunos.

Na generalização da sentença matemática que expressa a área de retângulos com 64 unidades métricas (item d), vinte e três alunos utilizaram um registro na forma de linguagem algébrica errado. Muitos deles escreveram expressões como $x \cdot x = 64$ ou $y \cdot y = 64$; porém o correto é $a \cdot b = 64$. Na conversão da linguagem numérica para a algébrica, o objeto matemático considerado foi o quadrado e não o retângulo, cujos lados poderiam ser representados por **a** e **b**.

No item **e**, vinte e quatro estudantes observaram que a variabilidade das grandezas **a** e **b** era inversamente proporcionais à área com valor constante.

No item **f**, a maior parte dos alunos (28) percebeu que todos os retângulos eram semelhantes, pois tinham o mesmo valor de área. Os que erraram este item (10) disseram que não eram semelhantes, pois as medidas dos lados eram diferentes.

A seguir apresentamos o protocolo do único aluno que conseguiu ordenar o uso de registros de representação semiótica de forma adequada:

Figura 4 – Protocolo do aluno 13

Aluno 13

Item c: *o retângulo de menor perímetro foi o de 8×8*

Item d: *$x \cdot y = 64$*

Item e: *inversamente proporcional. Porque se aumentar um lado eu terei que diminuir o outro para o valor da área continuar igual.*

Item f: *sim, porque o valor da área é o mesmo; 64 u.a.*

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Na resolução do item **e** e **f** desta atividade, a maior dificuldade esteve no tratamento da representação discursiva, ou seja, elaborar registros na língua natural, a partir da observação e argumentação sobre o comportamento das variáveis lado e área do retângulo.

7.3 Análise da sequência generalizada algebricamente – Jogo dos barqueiros (A3)

Dez homens estão num barco de pesca. Há 11 lugares no barco, sendo que o sexto lugar está vazio. Qual o menor número de movimentos para que todos os pescadores sentados à frente troquem de lugar com os de trás?

Este jogo será desenvolvido da seguinte forma: utilizando um suporte com 11 lugares alinhados de modo a permitir a localização de 10 pinos em duas cores distintas, o jogo consiste em reverter a disposição de todos os pinos de uma mesma cor para os de outra cor. O jogo terá como base a seguinte regra: cada pino só poderá deslocar-se para um lugar vizinho vazio ou “pulando” um outro pino. Assim, não é permitido pular um lugar vazio, mas é permitido dois ou mais movimentos seguidos, saltando lugares ocupados.

Após a classe desenvolver uma rodada do jogo, pedir para responder as seguintes questões:

- a) Utilizando um par de pinos, quantos movimentos serão necessários para reverter as posições dos mesmos?
- b) Complete a tabela abaixo:

<i>Pares</i>	<i>Movimento</i>
<i>1</i>	
<i>2</i>	
<i>3</i>	
<i>4</i>	
<i>5</i>	

- c) Utilizando os dados obtidos dispostos na tabela acima, é possível descrever uma expressão que represente a lei de formação desta sequência. Represente esta expressão sendo que **p** representa o número de pares de pinos e **m** o número de movimentos mínimos.

Nesta atividade propomos aos alunos a elaboração de um esquema que proporcionasse a manipulação do material, simulando a troca de lugares dos barqueiros. Para isto, utilizamos uma placa de isopor representando o barco, onze palitinhos para representar os lugares alinhados e 10 fichinhas E.V.A. sendo 5 de cada cor para representar os barqueiros.

A turma foi dividida em grupos contendo 5 ou 6 estudantes, o que ajudou na discussão da questão. Como nas outras atividades, o objetivo desta questão era a generalização de uma lei de formação que envolvendo as informações obtidas no decorrer do desenvolvimento da atividade. Nesse caso, a sentença matemática deveria expressar o número mínimo de movimentos necessários para a troca de lugares entre os barqueiros.

O item **a** foi respondido por todos, dizendo que seriam necessários três movimentos para reverter a posição do primeiro par de pinos.

No item **b**, que pedia para completar uma tabela com os movimentos necessários para reverter os demais pares de pinos, os alunos não conseguiram chegar a um número mínimo de movimentos a partir do segundo par, motivo este que dificultou a resolução do item **c**. Este item tem por objetivo a descrição da sentença matemática que expressa o número mínimo **m** de movimentos necessários para reverter um número **p** de pares de pinos, a qual pode ser formulada por $m = p.(p+2)$.

A tabela para o item **b** poderia ser expressa assim:

Tabela 3 – Resultados do item “b”

<i>Pares</i>	<i>Movimento</i>
<i>1</i>	<i>3</i>
<i>2</i>	<i>8</i>
<i>3</i>	<i>15</i>
<i>4</i>	<i>24</i>
<i>5</i>	<i>35</i>

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

O grau de dificuldade desta atividade para alunos do Ensino Fundamental II é alto, em virtude da variabilidade dessas grandezas diretamente proporcionais, assim como pela restrição imposta à correspondência entre os valores numéricos destas grandezas, ou seja, um número mínimo de movimentos. Sendo assim, o insucesso na realização desta atividade por parte dos estudantes, algo que já era esperado por nós.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de múltiplos registros de representação semiótica para a compreensão de um conceito matemático mostrou ser de grande valia no contexto escolar do aluno. Buscamos na teoria de Raymond Duval, o referencial teórico necessário para a realização do estudo de caso de forma analítica para a resposta das perguntas que foram alvo de investigação deste trabalho.

A primeira questão de investigação que propomos nesta pesquisa foi em procurar saber quais tipos de registros de representação semiótica são mobilizados por alunos de 9º ano

do Ensino Fundamental II. Os resultados desse trabalho de campo mostraram-nos que os registros mais utilizados foram os multifuncionais de representação discursiva e os registros monofuncionais de representação discursiva.

No que tange a segunda questão de investigação, se a relação de congruência e não congruência entre registros de representação de um determinado objeto pode ser algo que delimita a sua compreensão, foi constatado no presente estudo que esse fato delimita sim a sua compreensão. As questões que apresentavam um objeto matemático com características congruentes em suas diversas formas de registro foram as mais acertadas pelos alunos.

A dificuldade central dos alunos deu-se no momento da conversão de um registro escrito em língua natural ou em escrita numérica para um registro na forma algébrica. Alguns generalizavam a sentença em linguagem natural, mas no momento de convertê-las em linguagem algébrica acabavam escrevendo uma expressão que era válida apenas para alguns resultados, não generalizando a situação como um todo.

O desempenho dos alunos na resolução da sequência didática nos faz concordar com o proposto por Raymond Duval em sua teoria, que no trabalho de compreensão de um conceito é de grande importância à mobilização de diversas formas de representações matemáticas, auxiliando na construção semântica do conceito.

THE CONCEPT OF FUNCTION IN BASIC EDUCATION THROUGH SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS

Abstract

The present study aimed to investigate which categories of written records are mobilized by students in 9th grade of elementary school mathematics involved in activities related to functional thinking, the main theoretical ideas of the theory of records Semiotic Representation of Raymond Duval. The study consisted of the application and subsequent analysis of the activities that compose a sequence didactic. The research was conducted with a group consisting of 38 students in the 9th grade of elementary school to a public school, located in the city of Pilar do Sul, São Paulo. The findings after examining the production of information reveal that the records were the most used multifunctional discursive representation and records monofunctional discursive representation and, although the

relationship between congruence and non-congruence of representations of a mathematical object, delimit comprehension thereof.

Keywords: Records Representation; Sequence Didactic Function; Phenomena of Congruence and Not Congruence; Basic Education

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA EDUCACIÓN EN LA EDUCACIÓN BÁSICA VIA REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Resumen

El presente estudio tuvo como recto investigar qué categorías de registros escritos son movilizados por los estudiantes del 9° grado de la escuela primaria que participan de actividades matemáticas relacionadas al pensamiento funcional; para ello, fue utilizada la teoría de la representación semiótica de registros de Raymond Duval. El estudio consistió en la aplicación y el posterior análisis de las actividades que componen una secuencia didáctica. La investigación se realizó con un grupo formado por 38 estudiantes en el 9 ° grado de la escuela primaria de una escuela pública, ubicada en la ciudad de Pilar do Sul, São Paulo. Las conclusiones después de examinar la producción de información revelan que los registros eran los más utilizados eran multifuncionales de representación discursiva y registros de representación discursiva monofuncionales y, aunque la relación entre la congruencia y la no congruencia de las representaciones de un objeto matemático, delimiten comprensión de los mismos.

Palabras clave: Registros de Representación; Secuencia Didáctica; Función; Fenómenos de Congruencia y No-Congruencia; Educación Básica

REFERÊNCIAS

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BASSOI, Tânia Stella. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do Ensino Fundamental**. 2006. 176 p. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

BRASIL, Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. 135 p.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. 144p.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. 58p.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33

FERNANDES, José António. Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. **Educação e Matemática**, n.46, p.33-36, 1998.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática**. São Paulo: Cortez, 1996.

MARKOVITS, Zvia; EYLON, Bat; BRUCKHEIMER, Maxim. Dificuldades dos estudantes com o conceito de função. In: COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert (Orgs.). **As ideias da álgebra**. (tradução de Hygino H. Domingues). São Paulo: Atual, p.49-69, 1995.

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite; OLIVEIRA, Paulo César. Da Educação Matemática: funções no centro das atenções. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.54, p. 37-42, set-out., 1999.

SANTAELLA, Lucia. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação do Estado. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática**. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008. 64p.

SILVA, Alexandre de Paula. **Conceito Função: as atividades introdutórias propostas no material de Matemática do Ensino Fundamental da rede pública estadual de São Paulo**. 2008. 93 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP.

TALL, David. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.) **Handbook of research on Mathematics teaching and learning**. USA: NCTM, p. 495-511, 1992.

Data de recebimento: 30/08/2012

Data de aceite: 25/09/2012