Aspectos da Lei de Resfriamento de Newton abordados em uma tarefa para o Ensino Médio

Article · June 2022

DOI: 10.22481/intermaths.v3i1.10787

Paulo Cesar Oliveira
Universidade Federal de São Carlos

DOI: 10.22481/intermaths.v3i1.10787

Artigo

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 3, N. 1, Jan - Jun 2022, pp. 125 – 138

Aspectos da lei de resfriamento de Newton abordados em uma tarefa para o ensino médio

Édrei Henrique Lourenço

Colégio Politécnico de Sorocaba, Sorocaba-SP, Brasil

henrique.edrei@gmail.com

Paulo César Oliveira

Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba-SP, Brasil

paulooliveira@ufscar.br

Aspects of Newton's cooling law addressed in a high school task

Abstract

This study aimed to explore the Law of Cooling proposed by Newton and carry out an experimentation with easily accessible materials, contemplating an experimental activity for the study, in high school, of the exponential function, as well as some ways to characterize it. Regarding the mathematical development of the law of cooling, we made use of the basic theory of ordinary differential equations. As for the development of the experimentation process, we rely on specific competences and skills contained in the National Common Curricular Base – BNCC - envisioning an interdisciplinary task involving the area of Mathematics and Physics for the study of exponential function. Keeping traces of the empirical-activist conception, in the activity of experimentation carried out, we value the development of the student's activity from the mobilization and coordination of several registers of semiotic representations, with different contents and meanings, but with reference to the same mathematical object. This study proved to be quite prominent, as it is easy to reproduce in the classroom and allows for very rich theoretical discussions about the processes of experimentation, argumentation, communication of results, semiotic representations involved in the mathematical writing used, in addition to allowing the integration of digital technologies in the processes of teach and learn mathematics.

Keywords: Problem Solving; Problem Formulation; Experimentation; Interdisciplinarity.

Resumo

Este estudo teve por objetivo explorar a Lei de Resfriamento proposta por Newton e realizar uma experimentação com materiais de fácil acesso, contemplando uma atividade experimental para o estudo, no Ensino Médio, da função exponencial, bem como algumas formas de caracterizá-la. No que tange ao desenvolvimento matemático da lei de resfriamento, fizemos uso da teoria básica sobre equações diferenciais ordinárias. Já para o desenvolvimento do processo de experimentação, apoiamos em competências específicas e habilidades contidas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, vislumbrando uma tarefa interdisciplinar envolvendo a área de Matemática e Física para o estudo de função exponencial. Guardando traços da concepção empírico-ativista, na atividade de experimentação realizada, valorizamos o desenvolvimento da atividade do aluno a partir da mobilização e coordenação de diversos registros de representações semióticas, com conteúdos e significados distintos, mas com referência ao mesmo objeto matemático. Esse estudo se mostrou bastante proeminente, por ser de fácil reprodução em sala de aula e possibilitar discussões teóricas riquíssimas acerca dos processos de experimentação, argumentação, comunicação de resultados, representações semióticas envolvidas na escrita matemática utilizada, além de permitir integrar tecnologias digitais nos processos de ensinar e aprender matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Formulação de problemas; Experimentação; Interdisciplinaridade.

Submetido em: 05 de fevereiro de 2022 - **Aceito em**: 06 de abril de 2022

INTRODUÇÃO

Em seu livro “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, ou como comumente é mencionado “Principia”, Isaac Newton (1643 – 1727) apresentou formulações matemáticas profundas para diversos fenômenos da natureza. Mas certamente a contribuição maior dessa publicação foi a evidência de que fenômenos naturais poderiam ser modelados matematicamente e que as equações diferenciais seriam ferramentas indispensáveis para tais formulações [1].

Enquanto as equações algébricas relacionam as mais diversas potências de um número desconhecido, as equações diferenciais relacionam várias derivadas de uma função desconhecida, mostrando-se muito mais grandiosas. Ao longo da história, pós invenção do cálculo, matemáticos se dedicaram, a priori, a descobrir fórmulas explícitas ou métodos para soluções de tipos particulares de equações diferenciais. Essencialmente, há dois tipos de equações diferenciais: as ordinárias e as parciais.

As equações diferenciais ordinárias (EDO) relacionam uma função desconhecida de uma única variável com suas derivadas. Já as equações diferenciais parciais (EDP) referem-se a uma função desconhecida de duas ou mais variáveis, relacionadas com suas derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis. No presente trabalho, abordaremos apenas as equações diferenciais ordinárias.

Para a utilização das equações diferenciais nas mais diversas situações observadas na natureza, é necessário, antes de qualquer coisa, formular a equação que descreve a situação ou o problema em questão. Todavia, a obtenção de tal equação pode não ser tão simples. Embora não haja uma tabela de regras a serem seguidas para a obtenção do modelo desejado, nos processos de modelagem matemática é importante levar em consideração as variáveis independentes e dependentes envolvidas no problema, suas unidades, os conhecimentos ou observações já realizadas sobre o fenômeno, sua complexidade e principalmente a relação entre as variáveis [2].

Dentre as muitas aplicações das equações diferenciais ordinárias (EDO) aos fenômenos químicos, físicos, biológicos, neste trabalho abordaremos a equação diferencial contida na modelagem da Lei de Resfriamento proposta por Newton.

Paralelamente a isso, ao analisarmos a Base Nacional Comum Curricular – BNCC [3], verificamos o destaque dado a competência de argumentar, no qual, segundo [3, p. 530] “seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas”. A primeira competência específica apresentada pela BNCC para a área de matemática diz que o estudante deve

> utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo

> a contribuir para uma formação geral [3, p. 532].

Segundo o que argumenta o documento acima referido, tal competência contribui para a formação cientifica geral dos estudantes, posto que prevê a interpretação de situações da Ciência da Natureza. E, para que o estudante possa utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para estudar determinadas situações diversas, a modelagem matemática em âmbito educacional pode ser bastante eficaz.

Como há diversas possibilidades para o emprego da expressão 'modelagem matemática', destacamos nosso entendimento de que os processos de modelagem no âmbito educacional estão associados, sucintamente, à problematização e à investigação, podendo até mesmo ser utilizado termos diferentes: modelação matemática, tarefas exploratórias e investigativas, etc. Essas atividades não ocorrem de maneira isoladas, mas em uma rede conexões, cuja problematização se dá nos processos de questionamentos acerca de fenômenos observados e a investigação é associada ao ato de buscar, selecionar, manipular e refletir sobre dados obtidos.

No que tange ao ensino da Álgebra especificamente, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN [4, p. 84] já preconizavam que tal ensino "precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às ideias matemáticas". Assim, é importante destacar que tal documento caracteriza uma situação-problema como sendo

> uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe [4, p. 41].

Munido dessas considerações iniciais, vamos explorar a Lei de Resfriamento proposta por Newton e realizar uma experimentação com materiais de fácil acesso, contemplando uma atividade experimental para o estudo, no Ensino Médio, da função exponencial, bem como algumas formas de caracterizá-la. A atividade realizada após o desenvolvimento teórico da lei proposta por Newton no que tange a utilização das equações diferenciais ordinárias, contempla um experimento de resfriamento de uma pequena quantidade de água. Com esse experimento é possível discutir conceitos da termodinâmica e características da representação gráfica de funções.

A proposta metodológica apresentada nesse trabalho guarda traços da concepção empírico-ativista. Um exemplo de tarefa comum que contempla tal abordagem teórica é a utilização de recortes e união dos vértices de um triângulo que, no plano, permitir ao aluno a percepção de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Essa tendência tem como principais características: (1) o pressuposto de que o aluno "aprende fazendo", valorizando, portanto, atividades experimentais, estudo do meio, pesquisa, entre outros; (2) entender que a partir de atividades práticas envolvendo levantamento e comparação de dados, a aprendizagem pode ser alcançada por meio de generalizações de forma indutiva e intuitiva; (3) defender que o ensino de Ciências e Matemática seja desenvolvido num ambiente de experimentação [5].

1 LEI DE RESFRIAMENTO DE UM CORPO

A lei de resfriamento de um corpo proposta por Newton diz que a temperatura de um objeto (sem fonte externa) muda a uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia. Usando o processo de modelagem matemática por meio de equações diferenciais, considerando, por hipótese, que a temperatura do corpo (T) depende do tempo e é uniforme em todo o corpo, bem como que a temperatura do ambiente (T_a) permanece constante durante todo o fenômeno, esta lei pode ser expressa pela equação homogênea:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \\ T(0) = T_0, \end{cases} \tag{1}$$

com $k > 0$, pois quando $T < T_a$ temos que $\frac{dT}{dt} > 0$ e quando $T > T_a$ temos que $\frac{dT}{dt} < 0$. É importante destacar que é a constante de resfriamento do corpo e depende, dentre outras coisas, da natureza do objeto.

Utilizando os métodos de resolução de equações diferenciais, podemos resolver o problema de valor inicial (PVI) exposto em 1:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \Rightarrow \frac{dT}{(T - T_a)} = -k \cdot dt \Leftrightarrow \int \frac{dT}{(T - T_a)} = \int -k \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{(T - T_a)} dT = -k \int 1 \cdot dt. \tag{2}$$

Aplicando as técnicas de integração conhecidas, podemos integrar ambos os membros da igualdade 2:

$$\ln |T - T_a| + C_1 = -k \cdot t + C_2 \Rightarrow \ln |T - T_a| = -k \cdot t + \overbrace{(C_2 - C_1)}^{(C_3)}$$

$$\ln |T - T_a| + C_1 = -k \cdot t + C_3. \tag{3}$$

Para podermos isolar o valor de T, recorremos às propriedades operatórias dos logaritmos. Nesse sentido, temos:

$$e^{\ln |T - T_a|} = e^{-kt + C_3} \Rightarrow T - T_a = e^{-kt} \cdot e^{C_3} \Rightarrow T - T_a = C \cdot e^{-kt},$$

$$T(t) = T_a + C \cdot e^{-kt}. \tag{4}$$

Vale ressaltar que no desenvolvimento algébrico exposto, consideramos $e^{C_3} = C$, posto que e^{C_3} trata-se de uma constante real. Além disso, devemos levar em consideração o fato de que $T(0) = T_0$ e substituindo na equação 4, temos:

$$T(t) = T_a + C \cdot e^{-kt} \Rightarrow T(0) = T_a + C \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow T_0 = T_a + C \Rightarrow C = T_0 - T_a.$$

Portanto, uma vez conhecido o valor para a constante C, a solução do problema é expressa por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt}. \tag{5}$$

É válido destacar que não é adequado memorizar a expressão 5 obtida para aplicar na resolução de outros problemas. O que fizemos foi apresentar o caminho que pode ser seguido durante o processo de busca por solução de problemas envolvendo resfriamento de corpos, dadas as condições elencadas inicialmente.

Porém, como parte do objetivo desse trabalho é contemplar uma atividade experimental para o estudo, no Ensino Médio, da função exponencial, bem como algumas formas de caracterizá-la, vamos elencar possibilidades de apresentação do problema do resfriamento de corpos aos estudantes desse nível escolar, proporcionando a eles aulas experimentais em um contexto interdisciplinar entre a área de Física e Matemática. Assim, como nessa etapa de escolaridade os estudantes ainda não construíram as ferramentas necessárias para a resolução da equação diferencial que modela o problema, assumiremos válida a solução apresentada em 5.

Teoricamente, o resultado obtido em 5 indica que a temperatura do corpo só atingiria a temperatura ambiente, $T = T_a$ apenas quando o valor de t fosse para o infinito, isto é, a temperatura do corpo ficará tão próxima da temperatura ambiente que maior for o valor de t. Isso parece indicar uma impossibilidade, mas segundo [6] no que tange ao processo de modelagem o valor de t tender ao infinito deve ser interpretado como "t assume valores relativamente grandes comparados com a evolução das variáveis" [6, p. 58].

Dessa forma [6, p. 58] destaca que se "denotarmos por t_∞ o tempo necessário para obtemos 99% da temperatura ambiente, ou seja, um erro de menos de 1%, podemos considerar $T \approx T_a$".

Assim, para $t = t_\infty$ temos que $T(t_\infty) = \frac{99}{100} T_a$. Aplicando em 5 obtemos:

$$T(t_\infty) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty} \Rightarrow \frac{99}{100} T_a = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty}$$

$$\frac{99}{100}T_a - T_a = (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty} \Rightarrow \frac{99}{100}T_a = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty}$$

$$\frac{99}{100}T_a - T_a = (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty} \Rightarrow \left(\frac{99}{100} - 1\right) T_a = (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty}$$

$$(-0,01)T_a = (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty}.$$

Novamente, para podermos isolar o valor de t_∞, podemos recorrer às propriedades operatórias dos logaritmos. Dessa forma, temos:

$$\ln|-0,01T_a| = \ln|(T_0 - T_a) \cdot e^{-kt_\infty}|$$

$$\ln|-0,01T_a| = \ln|(T_0 - T_a)| + \ln|e^{-kt_\infty}|$$

$$\ln|-0,01T_a| = \ln|(T_0 - T_a)| - kt_\infty \ln|e|$$

$$kt_\infty = \ln|(T_0 - T_a)| - \ln|0,01T_a| \Rightarrow kt_\infty = \ln\left|\frac{(T_0 - T_a)}{0,01T_a}\right|$$

$$t_\infty = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{100(T_0 - T_a)}{T_a}\right|. \tag{6}$$

Analogamente é possível demonstrar que para atingir um valor de aproximadamente $x\%$ da temperatura ambiente, podemos utilizar a expressão:

$$t_\infty = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{100(T_0 - T_a)}{(x-100)T_a}\right|. \tag{1.6*}$$

Como forma de exemplo de aplicação, pode-se levar em consideração o problema apresentado por [2] sobre a lei de resfriamento dos corpos proposta por Newton. Esse problema pode inclusive ser utilizado como motivação para o experimento que será realizado.

> [...] Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei de resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de $200°$F (cerca de $93°$C) ao ser colocado na xícara e, 1 minuto depois, esfriou para $190°$F em uma sala a $70°$F, determine quando o café atinge a temperatura de $150°$F. [2, p. 35]

A fundamentação teórica desenvolvida aqui será base para realizarmos o experimento que segue, utilizando ferramentas computacionais e materiais de fácil acesso e baixo custo, tendo em vista sua reprodução como estratégica metodológica para o estudo das funções exponenciais.

2 A REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO

Observa-se que a expressão 5 apresentada como solução do problema 1, relativo à Lei de Resfriamento de Newton, é uma função exponencial. Assim, por meio de experimentação, obtivemos dados que nos permitiram construir gráficos e linhas de tendência usando o software Excel, a partir dos quais encontramos indícios de que, de fato, o comportamento da temperatura de um corpo durante o processo de resfriamento é do tipo exponencial, conforme destacou Newton. Dessa forma, destacamos sucintamente os materiais utilizados e as condições em que o experimento foi realizado.

Para a realização desse experimento os estudantes necessitarão de: (A) uma bacia plástica; (B) um cronômetro; (C) um termômetro caseiro; (D) um termômetro ambiente; (E) água aquecida. É importante destacar que nossa intenção foi utilizar apenas materiais de fácil acesso e com custo baixo, por isso utilizamos um termômetro caseiro de $42°$C. Assim, já destacamos antecipadamente que os dados obtidos poderiam ser melhorados caso utilizássemos um termômetro com temperatura máxima superior ao utilizado nesse experimento (esse é um ponto muito importante para a discussão dos possíveis erros no processo de aferição das medidas).

Primeiramente a água foi aquecida a uma determinada temperatura superior a $42°$C. Após o aquecimento, a água foi inserida na bacia plástica e alocada em local que permitisse a perda de temperatura apenas para o ambiente. O termômetro foi inserido de modo adequado para que a temperatura fosse medida conforme o passar do tempo. Quando a temperatura da água atingiu $42°$C, medimos a temperatura ambiente ($T_a = 27°$C) e iniciamos o cronômetro, fazendo marcações em intervalos de 3,5 minutos. Dadas as condições que realizamos o experimento, verificamos que esse intervalo de tempo foi o que melhor se ajustou aos objetivos que tínhamos.

Enquanto a água perdia calor, os dados observados foram inicialmente anotados em uma tabela manualmente e posteriormente inseridos na planilha eletrônica do *software Excel*. A tabela 1, contempla os dados obtidos em uma das três repetições do experimento.

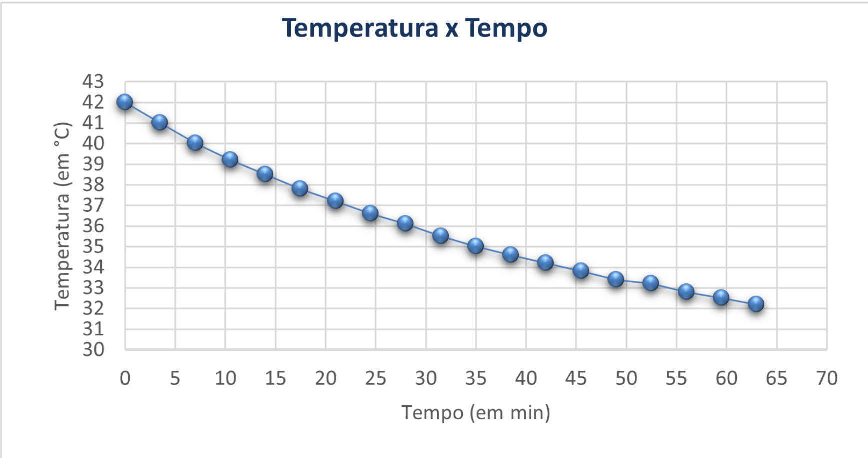
Tabela 1: Temperatura da água ao longo do tempo durante a experimentação realizada.

Tempo (min)	0	3,5	7	10,5	14	17,5	21	24,5	28	31,5	35	38,5	42	45,5	49	52,5	56	59,5	63
Temperatura (°C)	42	41	40	39,2	38,5	37,8	37,2	36,6	36,1	35,5	35	34,6	34,2	33,8	33,4	33,2	32,8	32,5	32,2

Fonte: Elaborada com base nos dados da pesquisa

A partir dos dados obtidos no experimento, apresentados na tabela 1, utilizamos o *software Excel* para a construção de um gráfico de dispersão. Como o experimento durou aproximadamente 1 hora, ajustamos o eixo horizontal para 70 minutos com intervalos principais de 5 minutos. Já para o eixo vertical, relacionado às temperaturas observadas ao longo do tempo, ajustamos a graduação em intervalos de $1°$C, iniciando a contagem a partir de $30°$C até um máximo de $43°$C. Esses ajustes foram realizados para que a área de plotagem do gráfico ficasse mais visível, e a distribuição da curva fosse mais uniforme. O conteúdo do gráfico 1 é apresentado a seguir:

Gráfico 1: Temperatura em função do tempo a partir do experimento realizado.



Fonte: Elaborado com base nos dados da pesquisa.

Os dados observados na tabela nos permitiram calcular, também, a razão entre duas temperaturas consecutivas, pois para funções exponenciais, quando são realizados acréscimos iguais a variável independente (t), o valor da variável dependente $(T(t))$ fica multiplicado sempre pela mesma constante. De outra forma, a razão entre duas temperaturas consecutivas deve ser constante. A tabela 2 engloba os cálculos realizados.

Tabela 2: Temperatura da água ao longo do tempo durante a experimentação realizada.

Tempo	Temperatura	Razão	Tempo	Temperatura	Razão
0	42	-	35	35	0,98592
3,5	41	0,97619	38,5	34,6	0,98857
7	40	0,97561	42	34,2	0,98844
10,5	39,2	0,98000	45,5	33,8	0,98830
14	38,5	0,98214	49	33,4	0,98817
17,5	37,8	0,98182	52,5	33,2	0,99401
21	37,2	0,98413	56	32,8	0,98795
24,5	36,6	0,98387	59,5	32,5	0,99085
28	36,1	0,98634	63	32,2	0,99077
31,5	35,5	0,98338			

Fonte: Elaborada com base nos dados da pesquisa

A análise realizada na tabela nos permite observar que as razões entre duas temperaturas consecutivas é aproximadamente 0,985. Embora esteja apresentando um comportamento crescente, podemos considerar que o valor obtido é constante, dadas as condições que foram realizados os experimentos, bem como a precisão do termômetro utilizado nesse experimento. Destacamos aqui, que isso é apenas uma indicação de que a razão é sempre constante e não uma demonstração sobre tal fato.

Utilizando a equação 5 e os valores da temperatura inicial $T_0 = 42°$, da temperatura ambiente $T_a = 27°$ e a temperatura medida corridos 7 minutos do experimento $T(7) = 40°$, podemos encontrar o valor de k conforme segue:

$$T(7) = 27° + (42° - 27°) \cdot e^{-7k} \Rightarrow 40° = 27° + 15° \cdot e^{-7k} \Rightarrow \frac{13°}{15°} = e^{-7k}.$$

Para podermos isolar o valor de k, podemos recorrer às propriedades operatórias dos logaritmos. Dessa forma, temos:

$$\ln\left(\frac{13°}{15°}\right) = \ln\left(e^{-7k}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{13°}{15°}\right) = -7k \cdot \ln(e) \Rightarrow k = \frac{1}{7}\ln\left(\frac{13°}{15°}\right),$$

$$k = 0,020442978. \tag{7}$$

Uma vez que obtemos o valor de k, podemos expressar a função exponencial que descreve o resfriamento da água a partir do experimento realizado. Utilizando os dados da tabela 1 e o valor de k, obtemos:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt} \Rightarrow T(t) = 27 + 15 \cdot e^{-0,0204t}. \tag{8}$$

Para confrontar com a função 8 obtida a partir dos dados experimentais e o valor apresentado em 7, utilizamos o *Excel* para realizar uma regressão não linear, obtendo uma linha de tendência do tipo 5. Para que pudéssemos obter o valor otimizado, utilizamos a ferramenta *SOLVER* dessa planilha eletrônica. Assim, buscamos o valor mínimo da soma dos quadrados dos resíduos deixados.

A aproximação obtida sugere que a curva que mais se aproxima dos dados obtidos experimentalmente é para os valores $k = 0,021629904$, $T_0 = 41,92°$ e $T_a = 28,94°$. Portando, a linha de tendência obtida foi:

$$T(t) = 28,94 + 12,98 \cdot e^{-0,0216t}. \tag{9}$$

Confrontando as funções obtidas em 8 e 9, podemos inferir que os resultados foram satisfatórios. Os valores de k e T_0 ficaram bastantes próximos dos obtidos experimentalmente. Já a diferença observada entre os valores obtidos teórica e experimentalmente para T_a indicam que possivelmente houve falha na verificação da temperatura ambiente durante o experimento ou ela variou durante o processo de experimentação.

3 PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO MÉDIO

A realização desse experimento é uma alternativa didática-metodológica para abordar o estudo das características e aplicações das funções exponenciais, em nível de formulação e resolução de problema.

A tarefa aqui proposta está relacionada com a terceira competência específica para a área de Matemática e suas tecnologias, com a habilidade (EM13MAT304), conforme descrição na BNCC:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. [3, p. 531]
>
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros [3, p. 536].

As habilidades relacionas ao desenvolvimento da competência específica supracitada se relacionam "à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros" [3, p. 535].

Alinhado com o que preconiza a Base Nacional Comum Curricular [3], a utilização de tecnologias permite aos estudantes formular conjecturas, avaliar e construir argumentos para dada situação.

Além disso, sugerimos que o professor que desejar realizar essa experimentação junto aos alunos, discuta alguns pontos sobre transferência de calor, apresentando exemplos do cotidiano, tais como resfriamento de café, bolo, alimentos em geral, tendo em vista avaliar os conhecimentos empíricos dos alunos sobre tais processos. Essa discussão pode ser realizada em parceria com o professor da disciplina de Física. Além disso, é fundamental que apresente um roteiro claro da experimentação, preparando tabelas para serem preenchidas durante o experimento, explique adequadamente como serão utilizados os materiais, atribua funções a cada integrante do grupo para que o experimento ocorra de forma organizada.

Outro ponto fundamental e enriquecedor no sentido de aprendizagem é a utilização das planilhas eletrônicas ou *software* de geometria dinâmica. Sugerimos a planilha eletrônica *Excel* e consideramos importante a orientação de como utilizar tal ferramenta, com aulas direcionadas antes ou após a realização do experimento. Dessa forma, a partir da manipulação dos dados na ferramenta computacional, é necessário que o professor não indique o tipo de função, mas que solicite aos alunos que procurem identificar as características juntos as funções já conhecidas por eles, caso essa atividade seja realizada pós estudo das funções elementares. Esse fato pode gerar discussões riquíssimas sobre os processos para obtenção de dados durante um processo de experimentação, inclusive para a validação dos resultados obtidos.

Ao categorizar alguns modos de conceber o ensino de Matemática no Brasil, [5, p. 5] elencou seis tendências pedagógicas que se destacam: "a formalista clássica; a empírico-ativista; a formalista moderna; a tecnicista e suas variações; a construtivista e a sócioetno-culturalista".

Dessa forma, conforme mencionamos anteriormente, a proposta metodológica apresentada nesse trabalho guarda traços da tendência empírico-ativista, cujo destaque está no fato de defender a ideia de que aluno "aprende fazendo" e que o ensino de Ciências e Matemática seja desenvolvido num ambiente de experimentação [5].

Assim, as possibilidades metodológicas que apresentamos nesse trabalho contribuem para a apresentação da Matemática como uma ciência dinâmica e que historicamente vem sendo construída pela humanidade, atendendo muitas vezes a determinados interesses da sociedade, valorizando inclusive a experimentação.

Além disso, é importante considerar o que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais, acerca das situações a serem propostas aos alunos no estudo da álgebra:

> [...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica [4, p. 116].

A respeito da proposição de situações-problema com essa natureza é fundamental levar em consideração o que apontou [7, p. 26] visando responder ao questionamento "Quais sugestões o Sr. daria para um professor de Matemática que desejasse utilizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica em suas aulas?", em uma entrevista concedida a Revista Paranaense de Educação Matemática:

> o fato de propor os problemas a partir de situações concretas não ensina nem a resolver um problema nem a aplicar conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais fora da sala de aula. Porque, mesmo em sala de aula, nós sempre acabamos por explicar a solução de um problema, isto não prepara, de maneira alguma, os alunos para resolver outros problemas, mesmo aqueles que utilizam o mesmo conhecimento! Para entender como trabalhamos em matemática para resolver problemas e até mesmo para saber como utilizar um conhecimento matemático para resolver problemas reais, é preciso primeiro tomar consciência das transformações de representações semióticas,

> por meio de mudanças de registros e pelos tratamentos específicos de cada registro. [7, pp. 26-27]

Em consonância com a citação anterior, é necessário formular problemas com possibilidades de mobilização e coordenações de representações semióticas entre registros. A teoria de Duval [7] parte do pressuposto de que um objeto matemático é abstrato e o acesso se dá pelas suas representações semióticas. Trata-se de uma abordagem cognitiva que analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática, levando em consideração a ideia capital de diferenciação entre objeto matemático e sua representação.

Nesse experimento, por meio da utilização da planilha eletrônica, é possível mobilizar e coordenar as representações semióticas entre os registros algébrico, na forma de tabela e gráfico, de modo a conduzir o acesso ao objeto função exponencial. A atividade a ser produzida pelo aluno pode proporcionar ao mesmo a compreensão de função exponencial a partir das múltiplas representações semióticas, cada uma com seu conteúdo e significado.

Acerca da importância do conceito de função, os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio destacam que:

> [...] o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática [8, pp. 43-44].

Já no que tange aos problemas de aplicação, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio destacam que:

> Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras [9, p. 121].

Portanto, com essa proposta metodológica esperamos que o aluno consiga verificar a importância do conceito de função como um todo, em especial da função exponencial, em situações do cotidiano. Buscamos estimular o processo de experimentação e a interdisciplinaridade como alternativa para o processo ensino-aprendizagem da Matemática, em consonância com as demandas educacionais atuais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, objetivamos explorar a Lei de Resfriamento proposta por Newton e realizar uma experimentação com materiais de fácil acesso, contemplando uma atividade experimental para o estudo, no Ensino Médio, da função exponencial, bem como algumas formas de caracterizá-la. Dessa forma, inicialmente apresentamos uma solução para o problema do resfriamento de dois corpos partindo da equação diferencial 1 e utilizando a teoria básica sobre o assunto. Uma vez encontrada a solução 5, realizamos um experimento para obter a equação que modela o resfriamento de certa quantidade de água aquecida em função do tempo. Por fim, propomos o experimento realizado como estratégia metodológica para o estudo de funções exponenciais no Ensino Médio, guardando traços da concepção empírico-ativista.

Durante as demonstrações realizadas na fundamentação teórica, foi possível perceber que em diversos momentos utilizamos de propriedades elementares dos logaritmos para resolver algumas equações exponenciais. Dessa forma, parte das demonstrações feitas aqui é possível de abordar em sala de aula com turmas de Ensino Médio, tendo em vista uma resolução de problema interdisciplinar.

Além disso, embora o experimento tenha sido realizado com instrumentos simples, foi possível verificar a validade de toda a teoria desenvolvida, inclusive indicando a possibilidade de discussões bastantes ricas e aprofundadas sobre o modo de pensar científico.

Mesmo que outros trabalhos ([10], [11]) também discutam possibilidades metodológicas utilizando resfriamento de fios, trazendo à baila problemas de cabeamento da rede elétrica e resfriamento de blocos cerâmicos, com aplicação à Engenharia Civil, o experimento que realizamos mostra-se de fácil reprodução em sala de aula e possibilita discussões teóricas riquíssimas acerca dos processos de experimentação, argumentação, comunicação de resultados, representações semióticas envolvidas na escrita matemática utilizada, além de permitir integrar tecnologias digitais dos processos de ensinar e aprender matemática.

Esperamos, portanto, com esse trabalho contribuir para o Ensino de Matemática em nível Médio, bem como ter apresentado propostas metodológicas possíveis até mesmo para novos formatos de Ensino Médio que estão em discussão.

REFERÊNCIAS

[1] I. Stewart, *Em busca do Infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. Tradução de George Schlesinger, 1st ed., Rio de Janeiro, RJ: Zahar, 2014.

[2] W. E. Boyce and R. C. Diprima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, Tradução de Valéria de Magalhães Iorio, 8th ed., Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[3] Brasil, Ministério da Educação, *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018.

[4] Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[5] D. Fiorentini, "Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil," *Revista Zetetiké*, Campinas, SP, ano.3, no. 4, pp. 1-37, 1995.

[6] R. C. Bassanezi, *Equações Diferenciais Ordinárias: um curso introdutório*, Coleção BC&T UFABC Textos didáticos, [s.d.]. [Online]. Available: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/iedo/

[7] J. L. M. de Freitas and V. Rezende, "Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica", *Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)*: Campo Mourão, vol.2, no.3, pp. 10-34, 2013.

[8] Brasil, Secretaria de Educação Média. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, Brasília: MEC/SEM, 2000.

[9] Brasil, Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, Brasília: MEC/SEM, 2006.

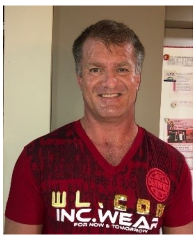
[10] P. B. Segobia, R. Susin and J. Cargnelutti, "Aplicação da lei do resfriamento de newton em blocos cerâmicos: modelagem, resolução analítica e comparação prática dos resultados". In: *I Semana da Matemática da UTFPR*, 2013.

[11] C. M. Miotto, J. Cargnelutti and V. M. Machado, "Aplicações das equações diferenciais na modelagem matemática da dilatação/contração térmica de cabos da rede elétrica". In: *I Semana da Matemática da UTFPR*, 2013.

BREVE BIOGRAFIA

Édrei Henrique Lourenço https://orcid.org/0000-0002-7119-8988

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), no campus de Sorocaba/SP. Integrante do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM). Atualmente é professor de Matemática no Colégio Politécnico de Sorocaba. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem, atuando principalmente nos seguintes temas: (1) Representação Semiótica e o Ensino de Matemática; (2) Ensino de Álgebra na Educação Básica; (3) Estado da Arte da pesquisa em Educação Matemática.



Paulo César Oliveira https://orcid.org/0000-0003-2514-904X

Professor associado da Universidade Federal de São Carlos (campus Sorocaba). Possuo mestrado e doutorado em Educação Matemática. Atuo no curso de Licenciatura em Matemática, no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas - PPGECE inclusive como coordenador atualmente, e no Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat. Desde 2012 sou líder do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática- GEPLAM (www.geplam.ufscar.br). Membro do GT12 - Educação Estatística da Sociedade Brasileira da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Membro da Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE). Desenvolvo pesquisas com os temas: registros de representação semiótica, avaliação, letramento (estatístico ou probabilístico) e crenças de autoeficácia.