

Uma análise de representações semióticas no estudo de sequências numéricas com alunos do Ensino Médio

An analysis of semiotic representations in the study of numerical sequences with High School students

Giovana da Silva Julião¹

Eliane Matesco Cristovão²

Paulo Cesar Oliveira³

RESUMO

Este texto contempla em seu conteúdo a vivência de uma licencianda em contexto de Estágio Supervisionado. Mais especificamente, um relato de atividade de pesquisa através da análise da produção escrita de alunos de uma turma de primeira série do Ensino Médio de uma escola pública, envolvidos na resolução de duas tarefas sobre sequências numéricas. Com base nas contribuições da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, o planejamento das duas tarefas e sua abordagem em sala de aula, numa parceria entre o professor e a estagiária acolhida em suas aulas de matemática, levou em conta a multiplicidade e coordenação de diferentes registros. O delineamento metodológico da pesquisa foi de natureza qualitativa e a análise do material documental (atividades matemáticas dos alunos) permitiu abordar as atividades cognitivas de tratamento e conversão, além da análise dos critérios de congruência semântica. Os resultados da pesquisa revelaram a necessidade de produção de significados para a atividade de tratamento e no caso da conversão, a relação do custo cognitivo em decorrência da não conservação de critérios de congruência.

PALAVRAS-CHAVE: Sequência. Progressão. Registro de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This text includes in its content the experience of a graduate student in the context of Supervised Internship. More specifically, a report of research activity through the analysis of the written production of students from a first grade class in a public school, involved in the resolution of two tasks on numerical sequences. Based on the contributions of Raymond Duval's theory of semiotic

¹ Professora da Educação Básica e Graduada pela Universidade Federal de Itajubá. E-mail: giovanajuliao@hotmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7685-8941>.

² Professora Adjunta da Universidade Federal de Itajubá. E-mail: limatesco@unifei.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3070-1030>.

³ Professor Associado da Universidade Federal de São Carlos. E-mail: paulodfcm@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2514-904X>.



representation records, the planning of the two tasks and their approach in the classroom, in a partnership between the teacher and the intern welcomed in his mathematics classes, took into account the multiplicity and coordination different records. The methodological design of the research was of a qualitative nature and the analysis of the documentary material (mathematical activities of the students) allowed to address the cognitive activities of treatment and conversion, in addition to the analysis of the semantic congruence criteria. The results of the research revealed the need to produce meanings for the treatment activity and, in the case of conversion, the relation of the cognitive cost due to the non-conservation of congruence criteria.

KEYWORDS: Sequence. Progression. Registers of Semiotic Representation.

Introdução

A proposta de escrita deste texto é um exercício da primeira autora, em parceria com os demais autores, na condição de concluinte do curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade pública, com o objetivo de sistematizar uma atividade de pesquisa desenvolvida enquanto se constituía professora da Educação Básica.

No âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), assim como nas disciplinas de Práticas de Ensino e no Estágio Supervisionado, vivenciados pela primeira autora durante a graduação na Licenciatura em Matemática, são conduzidos estudos sobre o uso de diferentes abordagens para o processo de aprendizagem em matemática.

Um referencial desses estudos tem sido a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Na condição de pensador contemporâneo e investigador da aprendizagem matemática, o filósofo e psicólogo de formação Duval (2003, 2009) tem estudado o funcionamento cognitivo do aluno na realização de atividades matemáticas e seus possíveis problemas de aprendizagem.

Em nossos estudos, a compreensão matemática de conteúdos escolares tem-se constituído problema de pesquisa, em particular, nessa atividade de pesquisa, as sequências numéricas como objeto de estudo na 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública de Minas Gerais. Para Sousa (2017, p. 163-164) quando um licenciando sistematiza atividades de pesquisa desenvolvidas, trata-se de oportunidades de explicitar sua preocupação “[...] sobre as relações que podem fazer entre os conteúdos que ministrarão quando se tornarem professores e as teorias apresentadas durante o curso de Licenciatura”, entre outros fatores.

A presente pesquisa, embora tenha sido desenvolvida em Minas Gerais, mediante o estudo de propostas que se adequavam à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, optou por adotar as prescrições do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012). Nesse documento curricular, o estudo do conteúdo sequências numéricas estava vinculado ao desenvolvimento da seguinte

habilidade: “saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível” (SÃO PAULO, 2012, p. 65).

Apresentamos a análise de um episódio ocorrido em uma atividade de regência em um contexto de Estágio Supervisionado, sob a supervisão de um professor parceiro que acolheu a licencianda e primeira autora deste artigo em suas aulas para a 1ª série do Ensino Médio. De acordo com Gama e Sousa (2015, p. 34) o termo acolher “está diretamente relacionado à disponibilidade daquele que já atua enquanto profissional, a receber, orientar e compartilhar seus conhecimentos com aquele que está pensando em abraçar a profissão docente”.

Nesta perspectiva relatamos uma vivência da licencianda em conformidade com o que Gama e Sousa (2015, p. 16) têm difundido em diversas publicações sobre a temática a Estágio Supervisionado: “romper com a ideia de que o estagiário é um mero observador e crítico do que constata nas salas de aula”.

O conteúdo do episódio em sala de aula envolveu o trabalho com duas tarefas sobre sequências numéricas, especificamente as progressões; com o objetivo de analisar as atividades dos alunos, de acordo com a mobilização e coordenação das representações semióticas para um mesmo objeto matemático. Em nossa pesquisa, dentre os registros de representação, de acordo com o objeto ‘sequências numéricas’, predominou o enunciado na língua materna, o registro algébrico, registro numérico e registro figural (padrões de figuras).

Para o cumprimento desse objetivo, o contorno da pesquisa empregou a perspectiva qualitativa, cuja produção escrita (protocolo) das atividades dos alunos e observações registradas pela estagiária no decorrer das aulas, constituíram o material submetido à análise, mediante categorias pré-definidas.

O tecer desse texto contempla o aporte teórico dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, aspectos do percurso metodológico da pesquisa, a apresentação de cada tarefa, bem como a respectiva análise das atividades escritas dos alunos entrelaçadas por observações.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Nos últimos anos, segundo Lourenço e Oliveira (2019), diversas pesquisas apontaram um significativo crescimento nas produções acadêmicas brasileiras que utilizam a teoria dos registros de representação semiótica em suas análises: Pontes, Finck e Nunes (2017); Brandt e Moretti (2014); Ferreira, Santos e Curi (2013); Colombo, Flores e Moretti (2008). Dentre esses estudos, Pontes, Finck e Nunes

(2017) realizaram um estado da arte sobre a utilização da referida teoria em âmbito nacional contemplando pesquisas no período de 2010 a 2015 com o propósito principal de “revelar o nível de abrangência, objeto matemático, procedimentos metodológicos, e aspectos da teoria de Duval mais recorrentes nas pesquisas brasileiras” (PONTES; FINCK; NUNES, 2017, p. 298).

Das diversas contribuições resultantes desse trabalho, as autoras destacaram que “as transformações de tratamento e conversão estão presentes em 95% dos trabalhos analisados” (PONTES; FINCK; NUNES, 2017, p. 308). Esse fato ilustra, entre outros aspectos, a preocupação dos pesquisadores com estas duas importantes transformações de registros de representação. Embora a transformação do tipo ‘tratamento’ seja mais comum nas práticas de ensino, Duval (2009) destacou que é justamente na transformação do tipo ‘conversão’ que reside a maior fonte de incompreensão dos alunos, de modo que a especificidade dessas transformações será discutida com maior profundidade no desenvolver deste texto.

Um estudo mais amplo em termos de mapeamento de pesquisas acadêmicas, foi realizado por Costa e Moretti (2020), os quais identificaram 228 dissertações de Mestrado e 39 teses de Doutorado. “As pesquisas científicas mencionadas neste trabalho foram coletadas em sites de instituições de ensino superior e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações”, no período de 1996 a 2019 (COSTA; MORETTI, 2020, p. 378).

Costa e Moretti (2020) perceberam uma variedade dos conteúdos matemáticos abordados: geometria, cálculo, equação algébrica, sistemas lineares e matrizes, integral, porcentagem, entre outros. Em relação ao estudo das sequências numéricas, foram identificadas a dissertação de Mestrado de Quina (2015) e a tese de Doutorado de Silva (2013), embora neste último trabalho a semiótica seja discutida na perspectiva de Pierce.

Quina (2015) relacionou o estudo de sequências e séries com a noção de infinito para estudantes de 1ª série do Ensino Médio. Já Silva (2013) desenvolveu sua tese de doutorado pautada na modelagem matemática com alunos de Licenciatura em Matemática, cujos modelos matemáticos foram vinculados ao conteúdo de progressões geométricas. Neste sentido, o tema sequências numéricas, bem como progressões aritméticas e geométricas constituem um nicho de pesquisa articulada à semiótica de Raymond Duval.

A representação semiótica pode ser articulada com produções acadêmicas que envolvem aquisição do conhecimento matemático, bem como os problemas

relativos à sua aprendizagem. De acordo com os estudos de Duval (2009, p. 32) as representações semióticas, em sua especificidade, “consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações ‘equivalentes’ em um outro sistema semiótico”.

No contexto geral da semiótica, o signo é relacionado a um objeto concreto, como o desenho de uma cadeira para representar o objeto que utilizamos para sentar, porém, na especificidade da Matemática, os termos ‘0, 2, 4, 6, 8, ...’, cada um destes numerais constitui um signo. A interpretação mental sobre este conjunto de numerais, dispostos entre vírgulas e com reticências é uma ação humana que, na perspectiva de Duval (2009), corresponde ao ‘significante’.

As interpretações (significados) associadas a esse conjunto de numerais que expomos contribuem no processo de significação ao se relacionar o significante com o significado (DUVAL, 2009). Se a significação dada por um sujeito for de uma sequência numérica infinita formada por números naturais pares, então a referência é um objeto da área da matemática, no caso, a progressão aritmética.

A Matemática utiliza uma grande variedade de representações semióticas, de modo que Duval (2003, 2009) utiliza o termo ‘registros’ de representação para designar diferentes tipos de representação semiótica como a linguagem natural, figuras geométricas, sistemas de escrita, gráficos cartesianos, entre outros.

Devido a essa multiplicidade de registros de representação em Matemática, Duval (2009, p.14) enfatiza a necessidade de não confundir o objeto matemático com sua representação colocando à baila a questão da dualidade entre o objeto e sua representação e isso fica evidente quando este expõe: “não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação”. Isso se justifica pelo fato de que diferentes representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático. Assim, o autor destaca que “toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (DUVAL, 2009, p. 91).

Para exemplificar esta ideia podemos considerar um problema de progressão, aritmética ou geométrica, cujo enunciado pode ser representado por meio da língua natural; um registro mais frequente. No entanto, é possível formular um problema a partir do registro de uma sequência de números inteiros, cuja análise permite diferenciar e caracterizar o tipo de progressão presente no enunciado proposto.

Então, o objeto matemático ‘progressão’ não é uma representação em especial, mas sim o conjunto de todas as suas representações.

Para Duval (2003), duas atividades cognitivas envolvendo a transformação de representações semióticas são imprescindíveis: tratamento e conversão. Os tratamentos são transformações de representação internas ao mesmo registro, por exemplo, os procedimentos numéricos para obter elementos de uma progressão aritmética ou geométrica. Já a conversão ocorre quando transformamos a representação de um objeto de um registro semiótico para outro, uma mudança que conserva o objeto em questão. A conversão e a coordenação de representações semióticas do objeto ‘sequência numérica’ podem ser exemplificadas pela mobilização da representação de um enunciado na língua natural (sequência dos números ímpares) para a representação algébrica, no caso, a fórmula do termo geral $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 1$.

Atrelado à conversão, Duval (2003) salientou que a mudança de registro pode gerar diferentes custos cognitivos, dependendo do sentido de mobilização e coordenação dos registros. Segundo o autor, para

analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação de partida com a representação terminal no registro de chegada. Esquemáticamente, duas situações podem ocorrer. Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência. (DUVAL, 2003, p. 19)

Duval (2003) destaca três critérios para a verificação da congruência ou não-congruência de uma conversão:

(1) Correspondência semântica ou correspondência uma a uma, entre os elementos significantes: para cada elemento simples no registro de saída tem um elemento simples no registro de chegada;

(2) Univocidade semântica terminal: cada unicidade significativa no registro de saída tem uma única unicidade no registro de chegada;

(3) A conservação da ordem que compõe cada uma das unidades de significado: diz respeito à forma de apresentação de cada uma das representações.

Para exemplificar, consideremos inicialmente a sequência geométrica representativa dos números quadrados perfeitos, conforme conteúdo da ‘figura 1’:

Figura 1 - Representação geométrica da sequência dos quadrados de números naturais.



Fonte: Elaborado pelos autores.

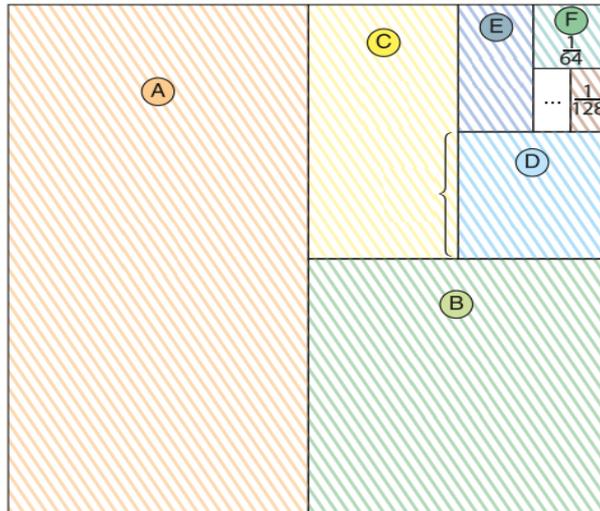
Se for solicitado que se encontre os próximos quatro termos dessa sequência não haverá conversão da representação geométrica no registro figural, pois o aluno simplesmente observará o padrão para poder desenhar as próximas figuras. Porém, caso seja solicitado que os alunos construam uma sequência numérica que represente a quantidade de pontos em cada termo da sequência, estará configurada uma conversão da representação geométrica para a simbólica, entre o registro figural e o numérico.

Essa conversão é congruente, pois a representação terminal na forma de registro numérico (1, 4, 9, 16, 25, ...), quando comparada à representação geométrica, satisfaz os 3 critérios de congruência. Em primeiro lugar, cada figura na representação geométrica tem um correspondente na representação simbólica por meio de um registro numérico, obtido pela contagem de pontos. Além disso, existe unicidade semântica terminal, uma vez que tanto a sequência geométrica quanto a numérica apresentam um padrão crescente nos seus elementos. Por fim, verifica-se também a conservação da ordem das unidades de significado, já que cada termo da sequência de partida (representação geométrica) se apresenta na mesma ordem dos termos da sequência de chegada (representação simbólica).

No sentido contrário, ou seja, na conversão e coordenação da representação simbólica para geométrica, apenas o primeiro critério de congruência (correspondência semântica) não é válido. Na representação de partida, cada termo da sequência '1², 2², 3², 4², 5², ...' contém dois elementos significantes: as bases das potências que indicam a posição do termo, equivalente ao lado do quadrado; e o expoente indica a operação de potenciação, cujo resultado fornece o número de pontos dos respectivos quadrados (registro figural). Já em relação à representação terminal no registro figural, temos apenas um elemento significativo, ou seja, a disposição de pontos para cada quadrado (registro de chegada).

Vamos apresentar na 'figura 2' uma sequência de divisões sucessivas de um quadrado:

Figura 2 - Representação geométrica de uma progressão geométrica.



Fonte: Adaptado de lezzi *et al* (2013).

Ao solicitar que se construa uma sequência numérica relacionada a área de cada quadrado designada por 'A, B, C, ...', conforme 'figura 2', o sujeito deve ser capaz de obter a sequência ' $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ '. Nesse exemplo, não há correspondência semântica entre os elementos significantes, pois na representação geométrica (partida) a região 'A' deve ser observada sob a ótica 'parte de um todo' o que denota duas unidades significantes, enquanto na representação terminal no registro fracionário $\frac{1}{2}$, o mesmo é apenas um elemento significativo.

Além disso, existe unicidade semântica terminal, uma vez que tanto a sequência geométrica quanto a numérica apresentam um padrão decrescente nos seus elementos, ou seja, dado que o primeiro elemento da sequência é $\frac{1}{2}$, cada elemento consecutivo tem como valor a metade do seu antecessor imediato.

Não há conservação da ordem que compõe cada uma das unidades de significado, pois na representação de partida, os registros figurais de cada quadrado estão dispostos de forma desordenada.

Em síntese, a análise dos critérios de congruência na 'figura 2' permitiu validar apenas a segunda condição. O propósito nos dois exemplos apresentados foi mostrar que o número de critérios de congruência não conservados implica na dificuldade de resolução da questão, por conta da demanda do custo cognitivo no processo de resolução.

Percurso Metodológico da Pesquisa

Para o cumprimento do objetivo da pesquisa no que diz respeito à mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica por aluno do 1º ano do Ensino Médio, a metodologia empregada envolveu uma pesquisa

qualitativa do tipo naturalista ou de campo. A mesma é entendida como uma “modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação, aplicação de questionário, teste, entre outros” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 106).

Dado um contexto de Estágio Supervisionado, a primeira autora abordou, no papel de professora regente, o estudo de padrões e regularidades em sequências numéricas, bem como especificidades do conteúdo progressões aritméticas e geométricas, ao longo de 12 horas-aulas.

Para este relato de pesquisa, apresentamos observações extraídas registradas em diário de bordo pela professora regente, além da utilização de registros escritos das atividades dos alunos, os quais foram nomeados a partir das iniciais do nome.

O episódio submetido à análise contém tarefas que privilegiaram padrões e regularidades em sequências numéricas. A primeira cena contém interlocuções iniciais da professora regente (Profa.) com os alunos do 1º ano do Ensino Médio com o propósito de diagnóstico para o início do estudo e aplicação das tarefas:

Profa.: o que pensam sobre a palavra sequência?

Aluno A: em ordem.

Aluno B: uma depois da outra

Aluno C: fileira

Aluno D: olha, por exemplo... as cartas do baralho (às, um, dois, três, ... ou valete, dama e rei).

O conteúdo desse diálogo aponta significações relacionadas a um conjunto ordenado de elementos cuja referência é um objeto da área da matemática. Nesse caso, as sequências numéricas contêm termos cuja representação simbólica pode ser dada por a_1 , a_2 , a_3 e assim por diante, cuja enumerabilidade pode designar um conjunto finito ou infinito de elementos.

Na próxima seção apresentamos cenas do repertório aulas contendo a apresentação de tarefas, descrição e análise do desempenho dos alunos em suas atividades matemáticas, subsidiadas pelo aporte teórico dos registros de representação semiótica.

Ao disponibilizar cada uma das tarefas pela professora regente aos alunos, foi feita uma leitura em plenária com o objetivo de identificar possíveis dúvidas de compreensão nos enunciados. Em seguida, os alunos discutiram procedimentos de resolução e quando necessário, a professora regente exerceu o papel de mediadora,

com intervenções pedagógicas expostas em plenária. As produções escritas dos alunos, em cada uma das tarefas resolvidas, foram recolhidas para análise de desempenho e considerações feitas, as quais foram devolvidas aos estudantes. Novamente, em plenária, a professora regente discutiu as resoluções apresentadas com o auxílio de giz e lousa. Durante a resolução das tarefas propostas, foram constituídos grupos de trabalhos, levando em conta 33 alunos, alocados em 12 duplas e 3 trios de alunos.

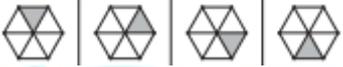
Discussão dos Resultados

A primeira tarefa envolveu a continuidade da escrita de termos em cada uma das sequências apresentadas, conforme conteúdo do 'quadro 1':

Quadro 1 - Regularidades em sequências.

1) Observem as sequências e escrevam mais três termos, de acordo com o padrão apresentado:

a) 0, 0, 0, 0, 0, __, __, __.

b)  _____

c) $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, _, _, _.$

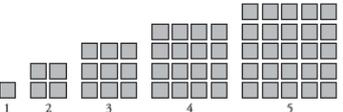
d) 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, __, __, __.

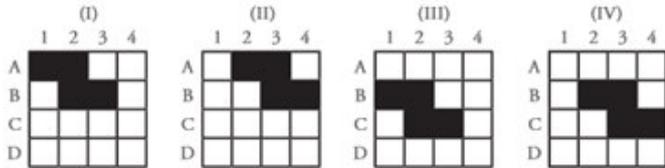
e) $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}, _, _, _.$

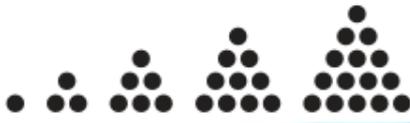
f) 1, -2, -3, -4, -5, -6, __, __, __.

g) 1, 5, 25, 125, 625, __, __, __.

h) 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; __, __, __.

i) 

j) 

k) 

l) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, __, __, __.

m) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, _, _, _.$

n) $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, _, _, _.$

Fonte: Itens b, i, j e k retirados de São Paulo (2014), demais elaborados pelos autores.

Disponibilizamos 14 sequências finitas com dois tipos de representação: simbólica e geométrica. A primeira representação envolveu o registro numérico cujos termos da sequência foram compostos por potências e raízes quadradas de números naturais, números inteiros e racionais, expressos na notação decimal e fracionária. A segunda representação envolveu o registro figural composto por polígonos (quadrado e hexágono regular) e o círculo.

Ao completar os três termos restantes das sequências, almejamos analisar nas atividades dos alunos o tratamento das representações simbólicas e geométricas, no caso, a transformação interna no registro numérico e geométrico de acordo com os padrões, regularidades e operações necessárias, de acordo com cada sequência.

Na resolução dessa primeira tarefa contamos com a presença de 33 alunos. Em termos de desempenho, todos conseguiram escrever os três termos restantes de cada sequência. Porém, houve necessidade de intervenção da professora regente em plenária com os alunos, mediante dúvidas expostas pelos alunos.

A expectativa inicial da professora regente era de que os alunos não tivessem dúvidas na resolução dessa tarefa. No entanto, um dos grupos a princípio não soube dar continuidade aos termos da sequência numérica. Uma dúvida comum aos demais alunos, o que instigou a professora regente em plenária, intervir:

Profa.: Como estão apresentados cada termo na sequência numérica?

Aluno D: na forma de raiz quadrada

Profa.: é possível calcular cada uma delas?

Houve uma pequena pausa mediante indagação da professora regente, mas instantes depois, alguns alunos manifestaram oralmente ‘que todas as raízes quadradas são exatas’, como forma de argumentar que todas resultam números naturais como, por exemplo, $\sqrt{64} = 8$. O ‘aluno H’ manifestou oralmente que a sequência das raízes quadradas poderia ser escrita na forma ‘1, 2, 3, 4, 5, 6, 7’. Este registro escrito feito pela professora regente na lousa foi utilizado pela maioria dos alunos para completar os três posteriores e consecutivos, conforme diálogo exposto:

Aluno L: Assim, os próximos são 8, 9 e 10.

Profa.: Mas a sequência original está escrita na forma de raízes quadradas. Como fica a escrita então?

Houve uma pequena pausa por conta da indagação e necessidade de elaborar procedimentos para a resposta solicitada. Logo o ‘aluno B’ manifestou o desejo de partilhar a resposta obtida em seu grupo de trabalho: $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$ e $\sqrt{100}$. Ao serem questionados sobre o procedimento utilizado, diversos alunos se manifestaram paralelamente expondo: ‘fomos fazendo as potências de dois para escrever as raízes’.

Uma observação no conteúdo escrito nos cadernos de alguns alunos, a professora regente reproduziu em lousa o procedimento utilizado: $8^2=64$, $9^2=81$ e $10^2=100$.

A resolução do 'item e' foi feita recorrendo à construção de uma sequência equivalente, ou seja, números naturais ordenados de 1 a 10. Em plenária, houve alunos que expuseram que não têm o hábito de 'usar as raízes quadradas'. Moretti (2002) abordou a questão do significado operatório vivenciado por esses alunos na resolução do item 'e':

1, 3-2, 4/4 e 5º referem-se ao mesmo número, ao mesmo objeto matemático, a mesma referência. No entanto, os objetos nestas distintas representações, não possuem o mesmo significado operatório. Um aluno, por exemplo, pode reconhecê-lo em 3-2, mas pode não fazer o mesmo em 5º ou em 4/4 (MORETTI, 2002, p. 345).

Em relação as representações geométricas uma dúvida generalizada ocorreu no 'item j', mais especificamente, pelo fato de não terem conseguido identificar a propriedade de simetria de translação aplicada no movimento do conjunto de quadrados pretos, uma transformação interna em cada um dos registros figurais. Foi um momento para a intervenção da professora regente que em plenária utilizou com estratégia resgatar com os alunos como foi o processo de resolução do 'item b':

Profa.: O que vocês observaram nos hexágonos do 'item b'?

Aluno M: Movimento de um triângulo em cada nova figura.

Profa.: E como é este movimento?

Aluno E: O triângulo gira no sentido horário

A professora regente qualificou esse movimento como rotação em torno de um ponto fixo, uma das propriedades de simetria. As propriedades simétricas de reflexão e translação foram discutidas em plenária, o que subsidiou a resolução do 'item j'. Na concepção de Duval (2011, p.91), uma figura "é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade." Essas propriedades só podem ser aprendidas por conceitos, por isso, a importância da intervenção pedagógica da professora com o objetivo de capacitar os alunos no tratamento do registro figural via translação do conjunto de quadrados pretos.

A segunda tarefa envolveu a análise da atividade cognitiva dos alunos na conversão de representações semióticas, conforme conteúdo exposto no 'quadro 2':

Quadro 2 - Atividade de conversão.

Adição	Descrição
$1 + 3 = 4 = 2^2$	A soma dos dois primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	

	A soma dos cinco primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 5.
$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2$	

Fonte: São Paulo (2014, p. 20).

Para efeito de análise do conteúdo das representações semióticas envolvidas no 'quadro 2', vamos dividi-lo em três partes. A primeira parte envolve a conversão da representação semiótica entre o registro numérico e língua natural, conforme conteúdo do 'quadro 3':

Quadro 3 - Transformação da representação numérica em representação na língua natural.

Adição	Descrição
$1 + 3 = 4 = 2^2$	A soma dos dois primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	

Fonte: São Paulo (2014, p. 20).

Na atividade de conversão do conteúdo do 'quadro 3' é esperado que o aluno seja capaz de transformar a representação numérica ' $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ ' na representação em língua natural, cujo enunciado pode ser formulado da seguinte forma: 'a soma dos três primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 3'. De forma similar, espera-se para a conversão e coordenação da representação semiótica entre o registro numérico e na língua natural, ou seja, a transformação entre ' $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ ' e 'a soma dos quatro primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 4'.

Nessa atividade cognitiva de conversão apenas o terceiro critério (conservação da ordem entre os elementos significantes) não é conservado. Levando em conta o que foi exposto na frase anterior, na sequência numérica ' $1 + 3 + 5 + 7$ ' iniciamos esse registro de partida com a escrita do primeiro número ímpar, enquanto que no registro de chegada, a escrita em língua natural iniciou-se com os signos 'a soma'.

Em termos de êxito nessa parte da tarefa, todos os 33 alunos não apresentaram erros na atividade de conversão, exceto a questão ortográfica em relação aos números ímpares, como exposto na 'figura 3':

Figura 3 - Atividade da dupla de alunos R e P.

Adição	Descrição
$1 + 3 = 4 = 2^2$	A soma dos dois primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	A soma dos 3 primeiros números ímpares é igual a 3^2
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	A soma dos 4 primeiros números ímpares é igual a 4^2

Fonte: Imagem da produção dos alunos.

A análise dos critérios de congruência semântica nessa fase da segunda tarefa revelou um custo cognitivo baixo, pelo fato de um critério não ter sido conservado. No entanto, o exemplo dado na primeira linha da atividade de conversão ('quadro 3' ou 'figura 3') pode ter estimulado os alunos na reprodução de registros na língua natural, similares ao exemplo dado, como na atividade dos alunos R e P ('figura 3').

O sentido inverso na conversão da representação semiótica entre o registro na língua natural (a soma dos cinco primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 5) e o registro numérico também apresenta um custo cognitivo baixo, por conta apenas da não conservação do terceiro critério de congruência. Consequentemente, nenhum aluno apresentou dificuldade para redigir a resposta correta ' $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ '.

A dificuldade nessa tarefa ocorreu no preenchimento solicitado para a última linha do conteúdo exposto no 'quadro 2', ou seja, na conversão da representação semiótica entre o registro algébrico ' $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2$ ', e o registro na língua natural, cuja resposta esperada pode ter a seguinte formulação: 'a soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n '.

Em termos de desempenho, apenas 4 duplas de alunos acertaram a resposta, como no caso dos alunos C e H, conforme protocolo da 'figura 4':

Figura 4 - Atividade dos alunos C e H.

$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2 \cdot n - 1 = n^2$	A soma de qualquer número ímpar que vá de 1 a $2 \cdot n - 1$ é igual ao quadrado de n .
---	--

Fonte: Imagem da produção dos alunos.

A análise das respostas dos demais alunos que apresentaram dificuldade na etapa final dessa tarefa revelou que o conteúdo dos protocolos escritos foi resultado de uma interpretação por mudança de contexto, com base no exemplo dado na primeira linha dessa tarefa (quadro 2). Nos termos de Duval (2012, p. 273) a conversão não deve ser confundida com a atividade de interpretação, a qual "[...] requer uma mudança de quadro teórico ou uma mudança de contexto. Esta

mudança não implica mudança de registro”. Reproduzimos no ‘quadro 4’ os protocolos escritos pelas duplas de alunos D-G e R-P:

Quadro 4 - Representação semiótica no registro de língua natural.

Alunos	Descrição
D-G	A soma dos N entre os primeiros números ímpares é igual a N^2
R-P	A soma dos $n^{\text{º}}$ primeiros números ímpares é igual ao quadrado do $n^{\text{º}}$

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos registros dos alunos.

Na primeira linha do ‘quadro 2’ temos a descrição ‘a soma dos dois primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2, associada à adição $1 + 3 = 4 = 2^2$ ’. Dada a mudança de contexto na adição, mais especificamente, a representação algébrica $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2$, a dupla D-G interpretou a expressão ‘a soma dos dois primeiros números ímpares’ por analogia, como ‘a soma dos N entre os primeiros números ímpares’. O signo ‘N’ não estabelece uma equivalência referencial com ‘primeiros números’. Embora tenhamos a impressão que a dupla R-P utilizou o signo ‘ $n^{\text{º}}$ ’ como equivalente referencial de ‘n’ termos, na verdade, o mesmo é uma abreviação comum da palavra número.

A construção equivocada do conteúdo da representação semiótica na língua natural deve-se ao fato dessas duplas, bem como dos demais alunos que encontraram dificuldades, em não atribuir o significado apropriado ao signo ‘2’ (base da potência) na adição $1 + 3 = 4 = 2^2$. O referido signo representa a quantidade de parcelas existentes na adição. Neste sentido, na representação algébrica $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2$, o signo ‘n’ contido no primeiro membro da igualdade contribuir na designação genérica de um número ímpar para todo ‘n’ pertencente ao conjunto dos números naturais. Isto implica interpretar o signo ‘n’ no segundo membro da igualdade como uma equivalência referencial de uma determinada quantidade de números naturais ímpares.

A atividade cognitiva de tratamento efetuada tanto na adição $1 + 3 = 4 = 2^2$ quanto na sequência $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2$, de acordo com Duval (2012, p. 268), “[...] depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido”. O caso da segunda adição, ou seja, $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2$, apresenta um custo cognitivo maior, devido à representação algébrica cujo conteúdo do registro implica uma compreensão matemática envolvendo a generalização de um padrão numérico, mais especificamente, a soma de uma quantidade finita (n) de números ímpares equivale ao quadrado do total de parcelas, ou seja, n^2 .

Considerações finais

Nesse estudo a formulação da primeira tarefa teve como objetivo analisar a atividade cognitiva de tratamento nas representações semióticas entre os registros simbólicos (padrões numéricos) e geométricos (padrões de figuras). No que diz respeito aos padrões numéricos, a dificuldade dos alunos situou-se na equivalência referencial à sequência numérica de números naturais de 1 a 9, a partir de uma escrita simbólica de raízes quadradas. A partir do próprio depoimento dos alunos, observamos que a operação envolvendo o cálculo de raízes quadradas é próprio do contexto escolar formal e não do cotidiano dos alunos.

Em relação à representação semiótica no registro geométrico nos itens da primeira tarefa houve necessidade do aluno mobilizar conhecimentos prévios em relação às propriedades de simetria, especificamente, de translação para a composição dos outros três termos consecutivos do padrão de figuras na sequência apresentada.

O êxito no desenvolvimento das atividades cognitivas de tratamento na continuidade de construção das diversas sequências apresentadas, requereu do aluno a produção de significados, de acordo com os procedimentos operatórios ou disposição das figuras em cada uma das sequências propostas. Em síntese, representações semióticas diferentes envolvem tratamentos diferentes para o mesmo objeto matemático. Operar na potenciação de 5^0 , 5^1 e 5^2 tem regras próprias, diferentes da operação com radiciação $\sqrt{1}$, $\sqrt{25}$, e $\sqrt{625}$, para fazer referência ao mesmo objeto matemático 1, 5 e 25.

A formulação da segunda tarefa teve como objetivo analisar a atividade cognitiva de conversão das representações semióticas nos dois sentidos, ou seja, entre o registro numérico na forma de adição de termos de uma sequência numérica e o registro na língua natural (descrição da sequência). O sentido inverso na atividade cognitiva dessas representações semióticas também foi contemplado.

Ainda na mesma tarefa houve a demanda pela conversão da representação semiótica no sentido do registro algébrico da adição de 'n' termos ímpares para o registro da língua natural sobre a descrição dessa adição na sequência numérica.

No decorrer das atividades dos alunos na resolução dos itens da segunda tarefa, o desempenho diminuiu em termos de respostas corretas por dois motivos. O primeiro foi devido ao custo cognitivo, pois na análise dos critérios de congruência semântica entre o registro de saída e de chegada, não houve conservação da ordem que compõe cada uma das unidades de significado. O segundo motivo diz respeito à

atividade cognitiva de tratamento, mais especificamente na representação algébrica $'1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2.n - 1 = n^2'$. A expressão do representante $'n^2'$ requer a seguinte significação: $'n'$ está representando a quantidade de números ímpares designados no membro esquerdo dessa igualdade.

Com base nas atividades cognitivas de tratamento e conversão das representações semióticas envolvidas na formulação e resolução das duas tarefas propostas apresentamos o grau de compreensão matemática em função das dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos da 1ª série do Ensino Médio envolvidos no estudo de sequências numéricas.

No Ensino Médio, geralmente o estudo de sequências numéricas é direcionado na relação de Progressão Aritmética (PA) com função afim e Progressão Geométrica com função exponencial. Nesta perspectiva, foram desenvolvidos os trabalhos de Quina (2015) com a discussão da noção de infinito e Silva (2013) com a atividade de Modelagem Matemática.

Em nossa pesquisa, priorizamos a análise dos padrões de regularidade para conduzir o estudo de sequências numéricas no Ensino Médio. Neste sentido, com base no aporte teórico e metodológico de Raymond Duval, destacamos que é importante formular tarefas que suscitam a atividade cognitiva tanto de tratamento quanto de conversão das representações semióticas entre registros, bem como a análise da congruência semântica com relação ao conteúdo da representação semiótica na língua natural.

Referências

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica. **Perspectiva em Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 7, n. 13, p. 22-37, 2014.

COLOMBO, Janecler Ap. Amorin; FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Mércles Thadeu. Registros de representações semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 41- 72, 2008.

COSTA, Crislaine; MORETTI, Mércles Thadeu. A contribuição da teoria dos registros de representação semiótica nas pesquisas científicas brasileiras: tendências e reflexões. In: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck. **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara.

(Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Editora Papyrus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Tradução Mércles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FERREIRA, Fernanda Aparecida; SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos; CURI, Edda. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana**, Recife, v. 4, n. 2, 14 p, 2013.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GAMA, Renata Prenstteter; SOUSA, Maria do Carmo. Elementos estruturantes que podem promover a construção do estágio compartilhado na Licenciatura em Matemática. In: LOPES, Celi Espasandin; TRALDI, Armando; FERREIRA, Ana Cristina (orgs.). **O Estágio na formação inicial do professor que ensina matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2015, pp.11-42.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva, v. 1, 2013.

LOURENÇO, Edrei Henrique; OLIVEIRA, Paulo Cesar. Articulação e coordenação das representações algébrica e gráfica da função quadrática: a importância da interpretação figural. **Revista Insignare Scientia - RIS**, São Pedro do Sul, v. 2, n. 4, pp. 238-257, 2019.

MORETTI, Mércles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**, v. 2, n. 3, p. 343-362, 2002.

PONTES, Helaine Maria de Souza; BRANDT, Celia Finck; NUNES, Ana Luiza Ruschel. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 297-325, 2017.

QUINA, Caio Moura. **Sequências e séries**: uma proposta duvaliana para a educação básica. 2015. 181 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo** - Caderno do Aluno: 1ª série do Ensino Médio, Matemática. São Paulo: SE, 2014-2017, v. 1.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática**: implicações para a atribuição de significado. 2013. 290 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SOUSA, Maria do Carmo. A atividade de pesquisa na formação inicial de professores de matemática. In: LONGO, Conceição Aparecida Cruz; HANITA, Marília Yuka; QUEIROZ, Paulo Henrique de. **A pesquisa na formação inicial de professores**. São Carlos: Pedro & João Editores, 2017, pp. 163-170.

Submetido em novembro de 2020.

Aceito em dezembro de 2020.

