COINSPIRAÇÃO
Revista dos Professores que Ensinam Matemática

Análise do Pensamento Algébrico e das representações semióticas mobilizadas e coordenadas em uma atividade de Olimpíada Matemática

Éverton Ferraz Marcelino Batista[1]
Universidade Federal de São Carlos

Paulo Cesar Oliveira[2]
Universidade Federal de São Carlos

RESUMO

O presente relato de experiência consiste na apresentação de um projeto que teve como objetivo inicial treinar estudantes do 7º e 8º ano, dos Anos Finais, para a segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A proposta foi de que os estudantes criassem seus próprios números e investigassem suas características inerentes, resultando assim em duas criações: os números *jáera* e *sapeca*. Utilizando metodologia qualitativa na modalidade estudo de caso, esta pesquisa faz a análise e identificação de elementos do Pensamento Algébrico, bem como das mobilizações e coordenações de registros de representação semiótica, com o fenômeno da congruência semântica, a partir das interações registradas no desenvolvimento da atividade. Foi possível identificar uma diversidade de elementos do Pensamento Algébrico, bem como a mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica.
Palavras-chave: Pensamento Algébrico; Registros de Representação Semiótica; OBMEP.

Analysis of algebraic thinking and semiotic representations mobilized and coordinated in a Math Olympiad activity

ABSTRACT

This experience report consists of the presentation of a project that initially aimed to train 7th and 8th grade students, from the Final Years, for the second phase of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP). The proposal was for the students to create their own numbers and investigate their inherent characteristics, thus resulting in two creations: the numbers *jáera* and *sapeca*. Using qualitative methodology in the case study modality, this research analyzes and identifies elements Algebraic Thought, as well as the mobilization and coordination of semiotic representation records, with the phenomenon of semantic congruence, from the interactions recorded during the development of the activity. It was possible to identify a diversity of elements of Algebraic Thought, as well as the mobilization and coordination of different semiotic representation records.
Keywords: Algebraic Thought; Semiotic Representation Records; OBMEP

---

[1] Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação pela UFSCar - Sorocaba. Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas pela UFSCar (2023). Pós-graduado no curso de especialização em Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor que Ensina Matemática na Educação Infantil e Ensino Fundamental pela UNICAMP (2023) e no curso de especialização em Educação Transformadora: Pedagogias, Fundamentos e Práticas, pela PUC do Rio Grande do Sul (2019). Membro do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM). ORCID: https://orcid.org/0009-0006-6586-4223. Lattes: https://lattes.cnpq.br/6531607468097978. E-mail: everton.marcelino.batista@gmail.com

[2] Doutor em Educação Matemática pela UNICAMP (2003). Coordenador do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) e docente do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGEd) da UFSCar – Sorocaba. Lider do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (http://www.geplam.ufscar.br). ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2514-904X. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7516513469811353. E-mail: paulooliveira@ufscar.br

Análisis del pensamiento algebraico y de las representaciones semióticas movilizadas y coordinadas en una actividad de la Olimpiada Matemática

RESUMEN
Este relato de experiencia consiste en la presentación de un proyecto que inicialmente tuvo como objetivo capacitar a estudiantes de 7º y 8º grado, de los Años Finales, para la segunda fase de la Olimpíada Brasileña de Matemáticas para Escuelas Públicas (OBMEP). La propuesta fue que los estudiantes crearan sus propios números e investigaran sus características inherentes, resultando así en dos creaciones: los números jáera y sapeca. Utilizando una metodología cualitativa en la modalidad de estudio de caso, esta investigación analiza e identifica elementos del Pensamiento Algebraico, así como la movilización y coordinación de registros de representación semiótica, con el fenómeno de la congruencia semántica, 09a partir de las interacciones registradas durante el desarrollo de la actividad. Fue posible identificar una diversidad de elementos del Pensamiento Algebraico, así como la movilización y coordinación de diferentes registros de representación semiótica.
Palabras clave: Pensamiento Algebraico; Registros de Representación Semiótica; OBMEP.

INTRODUÇÃO

Este texto tem como objetivo compartilhar a implementação de uma abordagem pedagógica que buscou preparar alunos para a segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). O curso foi realizado de forma remota, no ano de 2022, na escola municipal Matheus Maylasky, localizada em Sorocaba (SP), com alunos do primeiro autor deste relato.

A motivação para a elaboração e implementação do projeto se deu a partir do interesse dos alunos em obter conhecimentos específicos para a realização da segunda fase da OBMEP. A partir disto, o docente se propôs a ministrar aulas extras, no contraturno escolar, para ampliar os conhecimentos prévios dos discentes e familiarizá-los com os modelos das provas anteriores.

Durante o desenvolvimento do curso, foi elaborada uma proposta complementar que visava promover um senso de protagonismo entre os estudantes nesse processo de aprendizagem. Nessa atividade adicional, os estudantes foram desafiados a criar seus próprios números, seguindo critérios específicos, e, em seguida, explorar suas propriedades através de perguntas direcionadas do professor.

Este relato de experiência já foi analisado com base nas categorias do Letramento Matemático no trabalho de Batista e Oliveira (2024), os quais emergiram resultados que motivaram uma ampliação da análise para o âmbito do Pensamento Algébrico e da teoria dos Registros de Representação Semiótica. Desta forma, este relato de experiência objetiva responder a seguinte pergunta: *qual (is) elemento (s) do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005) e da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) é (são) possível (eis) identificar numa tarefa em que privilegie a produção escrita do estudante ao ser motivado a criar seu próprio número?*

REFERENCIAL TEÓRICO

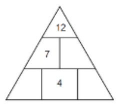
O termo Pensamento Algébrico é relativamente novo nos compêndios da Educação Matemática. Conforme Blanton e Kaput (2005) assevera, ele nasce como um combate à forma estritamente letrista, com transformismos algébricos, próprios de uma Álgebra ensinada por muito tempo. Muitos autores enxergam esse conceito de diferentes formas, havendo convergências e divergências entre as determinadas abordagens.

Blanton e Kaput (2005) identificam o Pensamento Algébrico a partir de três vertentes, bem como seus elementos constituintes, organizadas como categorias e seus respectivos códigos. Uma das vertentes é a Aritmética Generalizada, que em sua pesquisa são:

> Instâncias em que a aritmética foi usada como um domínio para expressar e formalizar generalizações foram codificadas como categorias de A até E. Tomamos essas instâncias amplamente para incluir processos aritméticos que envolviam quantidades generalizadas, não necessariamente aqueles processos que tinham generalização como resultado final. Isso incluiu instâncias em que os alunos estavam envolvidos em operações com números inteiros em formas abstratas (por exemplo, sentenças numéricas ausentes) ou usavam números de forma generalizada. (Blanton e Kaput, 2005, p. 419, tradução nossa).

Esta vertente e suas categorias constituintes encontram-se organizados no quadro 1:

Quadro 1 - Categorias constituintes da Aritmética Generalizada

Código e Descrição da Categoria	Exemplo Resumido
A: Explorar propriedades e relações de números inteiros	Conceber o elemento oposto numa soma de inteiros como consequência de gerar o elemento nulo
B: Explorando propriedades de operações em números inteiros	Comutatividade A + B = B + A
C: Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades	Sentenças como: 7 + 8 = ___+ 3
D: Tratar o número algebricamente	O estudante saber se o resultado de 34099+12981110 é par ou ímpar sem calcular o resultado da adição
E: Resolver expressões numéricas com números desconhecidos	Sabendo que cada número é obtido pela soma dos dois blocos que o sustenta, identifique os números dos blocos em branco: 

Fonte: Elaboração própria a partir de Blanton e Kaput (2005)

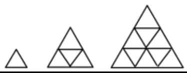
Outra vertente é o Pensamento Funcional, o qual foi utilizado como:

> As categorias F–J foram codificadas como instâncias em que os estudantes estavam envolvidos na generalização de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais. Isso levou a incluir processos associados, como simbolizar

> quantidades ou fazer previsões sobre os dados [...] (Blanton e Kaput, 2005, p. 423, tradução nossa).

Esta vertente e suas categorias constituintes encontram-se organizados no quadro 2:

Quadro 2: Categorias constituintes do Pensamento Funcional

Código e Descrição da Categoria	Exemplo Resumido
F: Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas	Uso de P para representar um número par qualquer
G: Representar dados em gráficos	Plotar pares ordenados no plano cartesiano. As representações gráficas estatísticas não são contempladas nesta categoria
H: Encontrar relações funcionais	Estudar a relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos 
I: Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos	Prever a quantidade de diagonais em um polígono convexo com 100 lados analisando os casos com menos lados
J: Identificar e prever padrões numéricos e geométricos	Análise em números figurados

Fonte: Elaboração própria a partir de Blanton e Kaput (2005)

Uma última vertente, denominada “mais sobre generalização e justificação” (quadro 3), atua como uma instância mais avançada do Pensamento Algébrico, que para os autores:

> Nas Categorias K–M, identificamos instâncias de raciocínio algébrico que não eram específicas para as formas delineadas na definição de raciocínio algébrico fornecida anteriormente. Ou seja, elas representavam atos de generalização abstraídos de um conteúdo matemático particular ou processos que vemos como centrais para que o raciocínio algébrico viável ocorra. Conjecturamos que essas categorias refletem a capacidade mais evoluída dos estudantes de raciocinar algebricamente e, por causa de sua complexidade, poderiam indicar que o raciocínio algébrico estava se tornando um hábito mental para os estudantes. (Blanton e Kaput, 2005, p. 427, tradução nossa).

Desta forma, os autores asseveram que esta vertente é a menos comum em crianças dos Anos Iniciais da Educação Básica, sendo as outras primeiras como indicação de foco para se trabalhar neste segmento.

Quadro 3: Categorias constituintes do Mais Sobre Generalização e Justificação

Código e Descrição da Categoria	Exemplo resumido
K: Usar generalizações para resolver tarefas algébricas	A generalização de um número ímpar qualquer na obtenção do resultado de que ímpar + ímpar = par
L: Justificação, prova e teste de conjecturas	$2^0 = 1$, obtendo-o da divisão sucessiva das potências de 2 por 2, sempre reduzindo seu expoente até justificar o caso de expoente zero
M: Generalizar um processo matemático	A partir da adição de frações usando frações equivalentes, generalizar o método para quaisquer frações

Fonte: Elaboração própria a partir de Blanton e Kaput (2005)

Concomitantemente a análise acerca do Pensamento Algébrico, esta pesquisa dedicou-se a estudar possíveis mobilizações e coordenações dos registros de representação semiótica, bem como o fenômeno da congruência semântica, de Duval (2009). A sinergia entre os dois referenciais teóricos se dá pelo fato do objeto de conhecimento matemático ser abstrato e sua apreensão ocorrer apenas pelos registros de representação semiótica, dado o fato de que se o sujeito detém saberes, o mesmo tem capacidade de representar (Charlot, 2000), externalizando por meio da diversidade de linguagens matemáticas.

Duval (2009) traz dois conceitos importantes para sua teoria, *semiósis* e *noésis*. Para ele, *semiósis* pode ser compreendida como a apreensão ou produção de uma representação semiótica e *noésis* como a apreensão conceitual de um objeto. Logo, "não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*" (Duval, 2009, p.17). Desta forma, há atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*: a formação de uma representação semiótica identificável, além da atividade cognitiva de transformação da representação semiótica via tratamento ou conversão.

Tratamento é "uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas" como o caso das manipulações algébricas na resolução de uma equação do primeiro grau (Duval, 2009, p.39). Já a conversão é "uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ele requer a coordenação dos registros pelo sujeito que a efetua", como o caso da transformação de uma representação semiótica entre o registro da língua natural (enunciado de uma tarefa) e o registro simbólico na forma de uma equação (Duval, 2009, p.39).

A ação cognitiva de conversão é a mais emblemática, de forma que o indivíduo, para mobilizar e coordenar registros de representação semiótica entre diferentes registros, se depara com o fenômeno da congruência semântica, regida sob três condições:

> correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e a conversão de uma unidade significante na representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (Duval, 2009, p.18).

Assim, para Duval (2009), a congruência semântica entre representações está intimamente ligada a situações de sucesso ou fracasso da aprendizagem matemática. A partir dos referenciais supracitados, será apresentado nas seções subsequentes o relato da experiência pormenorizado e categorizado de acordo com a conceituação do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005) e, também, dos conceitos relativos à teoria dos Registros de

Representação Semiótica (RRS) de Duval (2009).

RELATO DA PRÁTICA EDUCATIVA VIVENCIADA

O projeto de preparação para a segunda fase da OBMEP, sob a responsabilidade do primeiro autor desse relato de experiência, foi composto por oito encontros de cem minutos cada, realizados no contraturno escolar, por meio de videoconferências, no ano letivo de 2022. Participaram dessa etapa preparatória, 20 estudantes (7 meninos e 13 meninas), com idades entre 12 e 13 anos.

Em termos metodológicos, esse relato de experiência contemplou uma pesquisa de natureza qualitativa, na modalidade estudo de caso, dada as especificidades de estudo dos números, cujos detalhes apresentamos na sequência.

As aulas ocorreram na dinâmica de resolução guiada de questões de anos anteriores da segunda fase da OBMEP, tendo por base um material apostilado compilado pelo professor com tarefas extraídas do banco de questões *online* dessa olimpíada. O banco de questões da OBMEP é uma modalidade de material didático disposto em http://www.obmep.org.br/banco.htm. Nesse material digital encontramos características marcantes, sendo uma delas a de enunciados que definem números específicos, como *supernúmero*, entre outros.

Um *supernúmero* na OBMEP é um número de dois algarismos que pode ser expresso como a soma de dois outros números de dois algarismos, tal que a soma dos algarismos de cada um dos números resultantes seja igual à soma dos algarismos do *supernúmero*. Por exemplo, 35 é um *supernúmero* porque pode ser escrito como 11 + 24 (1+1 = 2, 2+4 = 6, 3+5 = 8) e como 21 + 14 (2+1 = 3, 1+4 = 5, 3+5 = 8).

O professor expressou aos estudantes a opinião de que esses números refletem a criatividade dos elaboradores das questões da prova, desconhecendo qualquer literatura que mencionasse sua utilização anterior.

A partir dessa observação, o professor propôs um desafio: os estudantes deveriam criar seus próprios números, inspirados nas definições não usuais da OBMEP, estabelecendo regras que considerassem pertinentes e, em seguida, explorar as possíveis características e propriedades desses números. A produção escrita dos estudantes foi submetida ao tratamento analítico com base nos dois aportes teóricos apresentados na presente pesquisa.

DISCUSSÃO E RESULTADOS

Para o conteúdo deste artigo, selecionamos o processo de construção do número nomeado de *jáera*, desenvolvido pelo estudante nomeado por A1, com idade de 12 anos.

Definição do número *jáera*

A1 ao exemplificar para o grupo o que seria um número *jáera*, ressaltou que se trata de um número associado a outro número natural, sendo esse outro número o seu originário (ou inicial). Sendo assim, o *jáera* é um número que pressupõe uma associação, uma relação com um outro número que lhe dá origem. O estudante explica aos demais que não é qualquer número originário que pode ter um *jáera* associado, ou seja, deve-se cumprir um primeiro requisito: o algarismo das unidades deve ser ímpar.

A partir desta primeira condição de existência, A1 prossegue exemplificando que há um procedimento, um algoritmo, para que se possa encontrar o *jáera* associado a este número original, e para fazer-se entender, criou um exemplo de número originário e demonstrou quais os procedimentos (iterações) que devem ser realizadas.

O número natural 12893 tomado como originário, devem ser feitas iterações sobre ele para encontrar seu *jáera* associado, sendo que a primeira iteração a ser realizada é a de multiplicar a unidade ímpar (no exemplo o 3) pelo algarismo par da posição mais próxima à esquerda, no caso é o 8, ficando: 3x8 = 24. O próximo passo remete a fazer o *deslocamento* do produto 24 para logo após à última posição à esquerda do número, ou seja, logo após ao algarismo 1 da dezena de milhar, e daí retira-se os dois algarismos que foram multiplicados, ficando: 24129. Nesse momento, deve-se observar a unidade: é ímpar? Se sim, repita todas as iterações. É par? Esse número resultante é o *jáera* do número originário. Como a unidade ainda é ímpar, repete-se cada passo: multiplica-se 9 pelo par mais próximo à esquerda (2): 9x2 = 18 e inclui-se o produto no número, excluindo os algarismos 2 e 9, ficando: 18241, com unidade ímpar ainda. Repetindo as iterações: 1x4 = 4, temos: 4182, com unidade par. Assim, pela definição do estudante, 4182 é o *jáera* do 12893.

Nesse momento em que o estudante define o número pode-se identificar a categoria D (tratar o número algebricamente) quando manipula os algarismos de forma não convencional e, também, a categoria M (generalizar um processo matemático), pois construiu um algoritmo bem definido para determinar o *járea* de um número que atenda às condições de existência.

Do ponto de vista semiótico, a produção do estudante remete a criação de um registro de representação específico para representar o objeto matemático que acaba de criar.

Denotamos como *registro de manipulação estrutural de dígitos* (ou apenas RMED), pelo fato de sua representação estar intrinsecamente ligada a certo *desligamento momentâneo* da função posicional das diferentes ordens em que um algarismo ou dígito pode estar, ou seja, a função valorativa de cada posição. Além deste *desligamento momentâneo*, o estudante atribui outra função às posições das ordens de um número, a de servir como uma espécie de caixas na qual se alojam diferentes resultados operacionais, assim, justificando o termo *momentâneo* desta análise, pois quando se opera sobre os algarismos através da multiplicação, o produto obtido é considerado como registro numérico, no entanto ao alojar sobre esta espécie de caixas, *desliga-se* esta propriedade valorativa. Sob a perspectiva da teoria de Duval (2009), de Representação Semiótica, o universo dos *járeas* formam um registro pelo fato de permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*: formação, tratamento e conversão. Neste primeiro momento, torna-se evidente as duas primeiras, no entanto no decorrer da dinâmica, situar-se-á a situação pertinente à conversão, possibilitando, assim, que o objeto matemático *jáera* não seja confundindo com sua representação (RMED).

Os momentos a seguir, relatados na subseção envolvendo as propriedades do *jáera*, foram vivenciados apenas pelo professor e o estudante A1.

Exploração de propriedades dos números *jáeras*

Após esse momento de explicação da definição do número, o professor faz provocações ao estudante, induzindo-o a explorar as propriedades dos *jáeras*:

> **Professor:** *É possível dizer que o número jáera de um outro número é sempre divisível por um número natural n?*
> **A1:** *é sempre divisível por 2, pois todo jáera é par.*

Aqui pode-se notar a relação que o estudante faz com a propriedade de paridade de um número com uma propriedade intrínseca de um *jáera*, ou seja, ele faz relações que permitem inferir uma outra propriedade do *jáera*, configurando a categoria A (*Explorar propriedades e relações de números inteiros*). Do ponto de vista semiótico, há formação de *semiósis* e *noésis* por parte do estudante. A *semiósis* ocorre quando o estudante apreende o registro em língua natural fornecido pelo professor e a *noésis* quando ele exerce a atividade cognitiva de conversão da representação semiótica entre os signos linguísticos em registro de manipulação estrutural de dígitos, para assim fazer uma apreensão conceitual sobre o objeto matemático *jáera*.

O professor prossegue:

> **Professor:** *Imagine um número inicial em que os algarismos são todos pares, menos o da unidade. Pela definição, ele tem um jáera associado, no entanto, é possível dizer de antemão quantas vezes terá de repetir os passos para encontrar o jáera?*
> **A1:** *1 vez.*

Neste caso, o professor percebe que o estudante opera com símbolos genéricos (P e I) que representam propriedades de algarismos, não recorrendo a exemplos numéricos. Neste ponto identifica-se a categoria F (simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas) ao operar com P e I, a categoria H (encontrar relações funcionais) ao estabelecer uma relação direta entre quantidade de iterações e a configuração dada.

Há, ainda, uma conversão entre registros, no entanto o registro de representação semiótica utilizado pelo estudante não foi formalizado, ficando no plano da representação mental, sendo que, para Duval (2009, p.17): "as representações mentais e as representações semióticas não podem ser opostas como dois domínios totalmente diferentes. O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas...". No entanto a comunicação ao professor fez-se ascender a *função de expressão* no estudante (Duval, 2009), visto que não sistematizou seu raciocínio ao comunicar ao professor.

O professor prossegue com os questionamentos:

> **Professor:** *Na mesma situação da questão anterior, só que sem a exigência de todos os algarismos serem pares exceto a unidade, há a possibilidade de determinação de iterações necessárias para encontrar o jáera antes de calculá-lo? Quais são as possíveis situações? Em casos em que há grupos de algarismos pares consecutivos, qual a relação entre a quantidade de algarismos pares consecutivos e os algarismos ímpares "à direita" desses pares consecutivos? Sugiro que continue fazendo representações usando P e I, modificando as configurações e investigando os casos.*
> **A1:** *Montei um exemplo, pensei que pode haver uma relação entre a quantidade de P e I com as classes das unidades simples. O exemplo é PP.IIP.PPI. Os pontos são pra enxergar se há relação entre as ordens e as posições das letras*.

Nesse diálogo nota-se a categoria L (justificação, prova e teste de conjecturas), pois elabora uma conjectura de que possa haver uma relação entre as ordens e a posição das letras, que por consequência remete a categoria H (encontrar relações funcionais), no entanto, logo em seguida ele abandona essa estratégia.

Sob a perspectiva da semiótica, este trecho pode ser analisado por parte do professor e do estudante. Sobre o professor, a sequência de perguntas remete a uma tentativa em forma de "funil" de esclarecer a tarefa ao estudante. A formação desta sequência de "esclarecimentos do que se quer" remete a um desconhecimento até mesmo por parte do professor sobre a resposta que se teria e, além do mais, da não familiarização com o novo registro de representação a ser explorado para designar um novo objeto matemático, o *jáera*. Assim, a resposta por parte do estudante certamente não seria *quase-instantânea*, pois estes tipos de tratamentos "correspondem à familiaridade ou experiência resultante de uma longa prática ou de uma competência adquirida em um domínio" (Duval, 2009, p. 51).

Desta forma, dos dois tipos de tratamentos possíveis à atividade cognitiva humana, a tarefa está inscrita na de *tratamentos intencionais*. Os *tratamentos intencionais* "apenas podem ser efetuados um após o outro e que são muito sensíveis ao número de elementos a integrar: experimentalmente, o tempo de reação aumenta muito rápido com o número de unidades informacionais..." (Duval, 2009, p. 52). Já a resposta do estudante remete a sistematização de um outro tipo de registro, que denominaremos de *registro algébrico paritário posicional* (RAPP), pelo fato de que se utiliza recurso a simbolização P e I para representar propriedades e sua posição importará não como valor, mas qualitativamente na análise que se prosseguirá. Do ponto de vista de Duval (2009) entende-se que o RAPP criado pelo estudante configura-se como registro por permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*: formação, tratamento e conversão. Neste trecho fica constatamos a formação, no entanto as duas outras serão constatadas a seguir.

O estudante prossegue com sua análise fixando algarismos pares consecutivos e variando as possibilidades das posições e a quantidade de algarismos ímpares:

> **A1:** *em casos em que se têm pares consecutivos, se tiver apenas um algarismo ímpar antes dessa sequência de pares, o processo de repetição acaba ali.*

Neste ponto identifica-se a categoria M (generalizar um processo matemático), pois conseguiu *cercar* um caso particular do problema proposto, operando apenas com um número abstrato composto pelas propriedades de seus algarismos, ou seja, também a categoria D (tratar o número algebricamente). Nesse momento identifica-se, novamente, a *semiósis* quando ele apreende a indagação do professor feita em língua natural e faz uma conversão para o RAPP. Há, também, *noésis* pois o estudante faz uma inferência conceitual a partir de sua produção semiótica. Nesta fala do estudante, é possível perceber, também, um tratamento dado, mesmo que em nível de representação mental interiorizando a representação semiótica, revelado pelo uso dos termos "processo de repetição", ou seja, ele opera internamente no registro RAPP.

O professor apontou que essa situação em que se tem pares consecutivos antecedendo um ímpar é uma situação particular de um estado de generalização mais amplo, ou seja, o processo de generalização teria que ser separado em diferentes casos. O estudante compreendeu, então, que estava em uma situação particular do caso geral procurado. O professor prossegue:

> **Professor:** *Como poderia generalizar mais esse caso particular, em que há sequências de pares consecutivos? Dê exemplos em que haveria mais do que 1 algarismo ímpar antes da sequência de pares.*

A partir daí o estudante reflete que sua conclusão valia não apenas quando se tinha um algarismo ímpar antes da sequência, mas sim que havia uma relação entre a quantidade de pares da sequência e a de ímpares que o antecedem, sendo possível identificar a categoria M (Generalizar um processo matemático). Depois da reflexão, o estudante afirma:

> **A1:** *é possível avançar a barreira de Ps quando logo depois da barreira se tenha o mesmo número de Is.*

Nesse ponto tem-se a categoria H (encontrar relações funcionais) ao fazer a inferência de que há uma relação entre quantidade de Is, Ps e números de iterações. É possível identificar neste mesmo ponto a categoria F (simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas), pois simbolizou uma sequência de pares com o termo *barreira*. Essa simbolização, que remete a uma designação, condiz com o processo de formação da representação semiótica como uma das atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*: "os atos mais elementares na formação são, conforme os registros, a designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento" (Duval, 2009, p.55). É possível afirmar que houve tratamento interno do registro por parte do estudante, mesmo que, novamente, tenha ocorrido como uma representação mental interiorizada de uma representação semiótica. Na dinâmica, de imediato o professor interveio:

> **Professor:** *só se passa a barreira de Ps se tiver a mesma quantidade de Ps e Is? Analise as possibilidades.*
> **A1:** *se houver a mesma quantidade ou mais de ímpares antes de uma barreira de Ps, a iteração ultrapassará a barreira de Ps, do contrário, o jáera será descoberto na barreira de Ps.*

O referido diálogo entre professor e estudante contém traços da categoria L (justificação, prova e teste de conjecturas) pois o estudante teve que testar seu modelo e da categoria M (generalizar um processo matemático), pois avançou no grau de generalização. Ao adicionar a situação "ou mais", o estudante demonstrar ter efetuado o tratamento de representações semióticas através de representações mentais no registro algébrico paritário posicional. Novamente, há *semiósis* e *noésis*, pela apreensão de representações semióticas e pela discriminação de uma diferença a partir desta apreensão. O professor avança nas indagações:

> **Professor:** *considere casos um pouco mais genéricos como uma configuração que se tenha sequências de pares "diluídos" nas posições, ou seja, não estamos mais a observar a sequência de pares apenas no começo, mas em qualquer posição do número e, ainda, que essa sequência seja "transponível", pois nos casos em que é "intransponível" tudo que haverá à esquerda será inutilizado. Avalie a configuração PPIPIPIIIPPII.*
> **A1:***PPIPIPIIIPPII→PPPIPIPIIIPI→PPPPIPIPIII→PPPPPIPIII→PPPPPPIII→PPPPPPII →PPPPPPI→PPPPPPP*

É possível notar que o estudante fez uso de um raciocínio correto na resolução, no entanto ele não fez a diferenciação entre número e algarismo (o professor, no começo das indagações não havia percebido também), pois quando se faz o produto de dois naturais de 0 a 9 (em que um fator é ímpar e outro par), têm-se as opções de configuração de produtos no sistema de registro algébrico paritário posicional: P, IP ou PP. Sendo assim, o estudante ao ser questionado sobre esse detalhe, percebeu que não necessariamente a resolução seria essa, mas que o exemplo resolvido por ele só daria certo nos casos em que o produto fosse sempre na configuração P.

Pode-se inferir que esse equívoco ocorre na tentativa de transformação da representação semiótica por meio da conversão entre o registro algébrico paritário posicional e o registro de manipulação estrutural de dígitos, ocasionando o fenômeno da não-congruência semântica. Sobre os critérios de congruência semântica, pode-se afirmar que a mobilização e coordenação entre esses registros não atende ao segundo critério, ou seja, o da univocidade semântica terminal, pois para cada P ou I pode-se associar diferentes signos: 0, 2, 4, 6 e 8 para P, e 1, 3, 5, 7 e 9 para I. Observa-se, também, que as duas representações pertencentes aos diferentes registros não são computacionalmente equivalentes, pois, para Duval (2009, p.72):

> Duas representações são ditas computacionalmente equivalentes se, sendo informacionalmente equivalentes, toda inferência que pode ser facilmente e rapidamente efetuada em uma delas pode sê-lo igualmente em outra. A noção de equivalência computacional cobre um fenômeno de congruência, não para a atividade cognitiva de conversão das representações de um registro a outro, mas para aquela de tratamento: existe correspondência entre as diferentes operações de tratamento que podem ser efetuadas nos dois registros semióticos diferentes sobre as representações iniciais convertíveis entre elas.

Assim, surge a necessidade de delimitar o que Duval (2009) chama de regras de conformidade, ou seja, estabelecer os limites de validade para o tratamento.

O estudante compreendeu que usar essa configuração baseadas em símbolos P e I não era uma estratégia precisa. A partir daí, o professor questiona se seria possível esgotar as possibilidades das configurações, para poder abranger todos os casos, recebendo uma resposta afirmativa do estudante, de forma que ele trouxesse a relação organizada na tabela 1, configurando A (explorar propriedades e relações de números inteiros):

Tabela 1 - Organização das Configurações dos Possíveis Produtos

Produtos P	Produtos PP	Produtos IP
1x2 = 4	3x8 = 24	2x5 = 10
1x4 = 4	4x5 = 20	2x7 = 14
1x6 = 6	4x7 = 28	2x9 = 18
1x8 = 8	5x8 = 40	3x4 = 12
2x3 = 6	6x7 = 42	3x6 = 18
		4x9 = 36
		5x6 = 30
		6x9 = 54
		7x8 = 56
		8x9 = 72

Fonte: Autores baseado no registro de A1

Neste ponto, o estudante tenta estabelecer uma regra de conformidade para compreender (*semiósis* e *noésis*) o alcance do seu algoritmo, no âmbito do registro algébrico paritário posicional (RAPP), que possibilite uma equivalência computacional entre esse registro e o registro de manipulação estrutural de dígitos (RMED). O estudante também fez uso do registro tabular para poder estabelecer esse limite. Nota-se, no entanto, que o uso deste registro é apenas auxiliar, contribui para compreender a relação e não a conversão entre registros de forma direta, ou seja, nenhum critério de congruência é atendido ao analisar uma possível conversão entre os registros em questão. Adiante, o estudante avançou em mais um passo da generalização, montando uma espécie de algoritmo com as propriedades que havia descoberto:

> **A1:** *inicialmente verifica-se se o número tem "barreiras" de Ps intransponíveis. Se tiver, avalia-se a quantidade de ímpares antes da barreira, essa quantidade será a quantidade de iterações finais antes de chegar no jáera.*

O estudante avalia, também, que um ponto importante a ser observado são os algarismos que o número possui e sua sequência, justificando pela tabela construída que suas combinações é que determinarão se será adicionado à esquerda um produto P, IP ou PP, podendo identificar neste ponto a categoria M (generalizar um processo matemático) a partir do desenvolvimento da categoria K (usar generalizações para resolver tarefas algébricas), pois fez uso de generalizações anteriores para avançar na solução a partir de um pensamento do tipo "se, então". O professor finaliza esse processo de provocações sobre a generalização:

> **Professor:** *quais seriam as consequências de se ter um produto P ou IP ou PP?*
> **A1:** *apenas os casos IPs complicam um pouco mais, pois os Is gerados podem ainda ser utilizados, caso não tenha nenhuma barreira impossível de passar antes deles. Nos casos em que se gera P e PP, nada se muda na contagem.*

Neste ponto é possível identificar a categoria M (generalizar um processo matemático), pois faz o fechamento de seu processo de generalização de determinação, *a priori*, do número iterações necessárias para se encontrar um *járea* dado um número originário qualquer. Numa perspectiva na teoria dos registros de representação semiótica, evidencia-se nestas duas últimas inferências *semiósis* e *noésis*, pela apreensão de uma configuração de representação semiótica via registro algébrico paritário posicional e a compreensão da extensão de validade sobre o processo de generalização encontrado, sendo esse processo possível pelo fato do estudante ter feito uso de um registro auxiliar. É possível notar, também, que o estudante faz operações de tratamento sobre esse registro, mas ainda no âmbito das representações mentais a partir de representações semióticas apreendidas.

O professor percebe que o estudante já estava cansado e encerra com uma última provocação:

> **Professor:** *um número jáera pode ter sido gerado de outros dois números diferentes?*
> **A1:** *sim, há diferentes números que levam a um mesmo jáera: 543 e 295 levam ao jáera 1. Pensei em produtos que dessem 10.*

O diálogo converge para a categoria A (explorar propriedades e relações de números inteiros) na estratégia de obter diferentes decomposições para um mesmo número e L (Justificação, prova e teste de conjecturas) ao responder com veemência após o teste.

Assim, análise dos resultados obtidos consistiu em identificar quais elementos do Pensamento Algébrico e dos Registros de Representação Semiótica emergem no estudante em uma situação didática em que se privilegia o protagonismo dos estudantes na criação de seus próprios números, bem como a exploração das propriedades inerentes a eles. Foi possível identificar que a proposta fez emergir no estudante alguns elementos do Pensamento Algébrico de Blanton e Kaput (2005) em determinados momentos da tarefa, mais especificamente em 7 das 13 categorias elencadas, mostrando uma insuficiência no aspecto de desenvolvimento global dessa forma de pensar.

No entanto, a quantidade de elementos (19 ao total) identificados ao longo da sequência didática evidencia potencialidade para trabalhar certos nichos do Pensamento Algébrico. Deste total identificado, cerca de 30% (6) incidiram sobre a categoria M, o qual demonstra elevado desenvolvimento do estudante relativo ao Pensamento Algébrico. Apesar de cerca de apenas metade dos elementos terem sido evocados, as três vertentes do Pensamento Algébrico foram contempladas, mostrando outra potencialidade de ensino da sequência didática relatada.

No que diz respeito à semiótica de Duval (2009), foi possível identificar a mobilização e coordenação, por parte do estudante, de diferentes registros de representação semiótica, sendo que a maior parte das vezes ocorreu em nível das representações mentais. É importante frisar que as situações de tratamento feito a partir de representações mentais é perfeitamente possível na teoria de Duval (2009, p. 46), visto que:

> Naturalmente podemos ter o "sentimento" de que estamos efetuando o tratamento no nível das representações mentais sem mobilizar explicitamente representações semióticas. Essa ilusão está relacionada ao desconhecimento de um fato genético e cultural fundamental: o desenvolvimento das representações mentais está ligado à aquisição e à interiorização de sistemas e de representações semióticas, a começar pelo da linguagem ordinária.

A criação de diferentes registros de representação, por parte do estudante, e a mobilização e coordenação destes, permitiu que ao longo da sequência ocorresse *semiósis* e *noésis*. Além disto, o uso de um quarto tipo de registro (já havia mobilizado a língua natural, RMED e RAPP), o tabular, como meio para transpor a não-congruência entre os registros criados funcionou como uma ponte para o desenvolvimento de elementos do Pensamento Algébrico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de um número particular dos estudantes adicionado a uma investigação de propriedades mostrou-se uma proposta pedagógica de alto potencial, pois além de proporcionar o desenvolvimento de processos do Letramento Matemático nos estudantes, como já identificados no estudo de Batista e Oliveira (2024), mostrou-se, também como uma sequência didática potente para desenvolver o Pensamento Algébrico.

A mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semióticas, inclusive não convencionais e com baixa congruência semântica oportunizou desenvolver no estudante diferentes conceituações, que apesar de remeterem a um objeto matemático não convencional, certamente amplia o repertório para a apreensão de objetos matemáticos pertencentes ao currículo escolar. A sequência didática poderia ser enriquecida pela exploração de outro registro de representação, o plano cartesiano. Outros questionamentos poderiam agregar, como: há *jaeras* que são iguais ao próprio número originário?

Frente aos referenciais teóricos utilizados na análise, consideramos promissor, para trabalhos posteriores, a análise a partir das funções discursivas, de Raymond Duval. O contexto de olimpíadas é secundário, quando comparado à versatilidade para aplicação, resguardadas as intenções educativas, a uma ampla faixa etária do período de escolarização. O fato de os discentes criarem o próprio objeto de estudos revelou um protagonismo do estudante, incidindo em uma motivação nos estudos, visto que eles tiveram conhecimento do ineditismo de suas produções.

REFERÊNCIAS

BATISTA, E. F. M.; OLIVEIRA, P. C. Projeto de imersão na OBMEP: o desenvolvimento de processos do letramento matemático através de uma situação didática que privilegia o protagonismo do aluno. *In*: Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em aulas de Matemática, 9., 2024, Campinas. **Anais […]**. Campinas: UNICAMP, 2024, 12p. Disponível em: https://www.even3.com.br/anais/ixshiam/785422-projeto-de-imersao-na-obmep---o-desenvolvimento-de-processos-do-letramento-matematico-atraves-de-uma-situacao-did/ Acesso em: 08 out.2025.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. **Journal for Research in Mathematics Education,** v.36, n.5, p. 412-446, 2005.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Tradução de Bruno Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

Histórico
Submetido: 27 de julho de 2025.
Aprovado: 11 de outubro de 2025.
Publicado: 31 de outubro de 2025.

Como citar o artigo - ABNT
BATISTA, E. F. M.; OLIVEIRA, P. C. Análise do Pensamento Algébrico e das representações semióticas mobilizadas e coordenadas em uma atividade de Olimpíada Matemática. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática** (MT), v. 8, e2025016, 2025. https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2025016